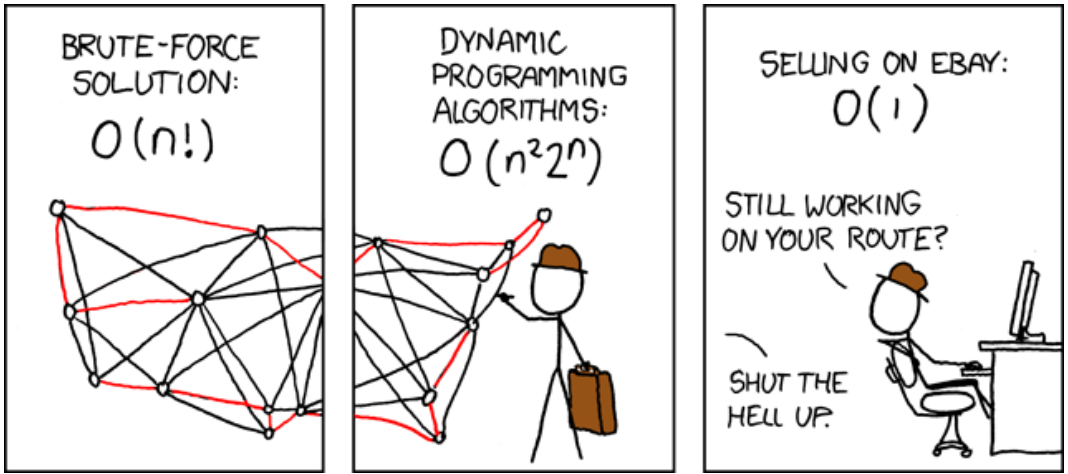
ETH zürich

D&A - Übungsstunde 8

Diese Folien basieren auf denjenigen der Vorlesung, wurden aber durch den Assistenten Adel Gavranović adaptiert und erweitert

Comic der Woche



xkcd

Übersicht

Heutiges Programm

Intro
Follow-up
Feedback zu [code]expert
Quadtrees
Dynamische Programmierung
Code-Beispiele
Tipps zu [code]expert
Outro

n.ethz.ch/~agavranovic

- Link zum Material für die Übungsstunden
- Webseite des Assistenten
- Mail an Assistenten

1. Intro

Intro

Willkommen zurück!

2. Follow-up

Follow-up aus vorherigen Übungsstunden

- "Vorherige" Übungsstunde (07) ist ebenfalls auf der Website
- nicht sehr relevant

3. Feedback zu [code]expert

Allgemeines zu [code]expert

- Ich merke, wenn ihr die Musterlösung (leicht angepasst) kopiert
  - Task "Task "Double Ended Queue""
  - Task "Finding a Sub-Array (Rabin-Karp)"
  - Task "Map/Filter/Reduce"
- (Hört auf damit)

Task "Open Addressing"

- Fast niemand hatte die double hashing-Aufgabe korrekt :(
- Stellt sicher, dass ihr das an der Prüfung könnt

Task "Trees"

- Worst Case Construction Time für Binäre Suchbäume
  - Worst Case:Sortierte Reihenfolge
  - $\Theta(n^2)$
- AVL-Trees $\neq$ Red-Black-Trees!
  - Es gab einen Fehler in der Task Description
  - AVL-Trees sind nicht relevant für die diesjährige Vorlesung[1]
- mit Traversal meinen wir nicht "von oben nach unten" sondern "alle Nodes besuchen"
- `delete(`k`)` in Red-Black-Trees ist schwer, inbs. der "rot nach unten ziehen"-Teil aus der Vorlesung

[1] Ausser die Dozierenden sagen etwas anderes

C++ Tasks

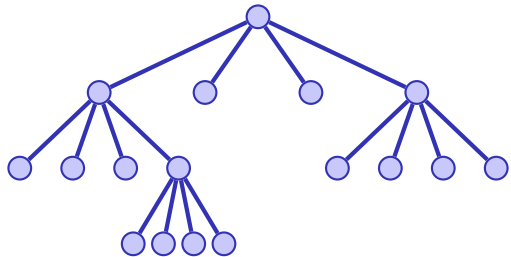
- Falls ihr nicht 100% geschafft habt, studiert die Musterlösung gut

Fragen zu [code]expert eurerseits?

4. Quadtrees

Quadtrees

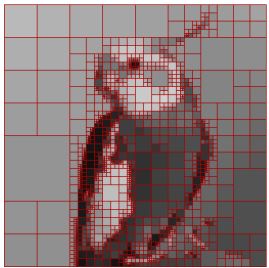
Quadtrees sind Bäume, bei denen jeder Knoten höchstens **vier** Kinder hat.

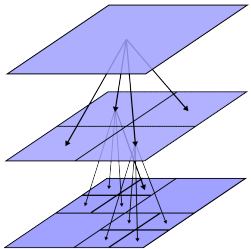


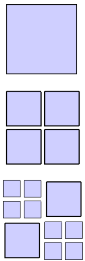
Hauptanwendung: Bildverarbeitung.

Quadtrees zur Bildkompression

Erkenntnis: (1) Teile das Bild rekursiv in vier Bereiche auf, (2) ordne die Bereiche Knoten in einem Quadtree zu und (3) weise jedem Blatt die Durchschnittsfarbe seines Bereichs zu.







Quadtrees zur Bildkompression

Wann und wo soll die Rekursion gestoppt werden?

Zu früh? Ist das besser? **Frage**: Sollen wir aufhören, wenn jeder Knoten auf ein Pixel abgebildet ist? **Antwort**: Wir würden das Originalbild erhalten, aber keine Speichereffizienz gewinnen.

Quadtrees zur Bildkompression

Wir möchten

- eine möglichst genaue Annäherung, und
- so wenige Knoten wie möglich.

Dies kann als Optimierungsproblem ausgedrückt werden:

$$H_\gamma(T, \boldsymbol{y}) := \gamma \cdot \underbrace{|L(T)|}_{\text{Anzahl Blätter}} + \underbrace{\sum_{r \in L(T)} \|y_r - \mu_r\|_2^2}_{\text{Summierter Approximationsfehler aller Blätter}} .$$

wo T ein Quadtree ist, $\boldsymbol{y}$ die Bilddaten sind und $\gamma \geq 0$ ein Regularisierungsparameter ist. Wir suchen die optimale Lösung $\operatorname{argmin}_T H_\gamma(T, \boldsymbol{y})$.

Quadtrees zur Bildkompression

$$H_\gamma(T, \boldsymbol{y}) := \gamma \cdot \underbrace{|L(T)|}_{\text{Anzahl Blätter}} + \underbrace{\sum_{r \in L(T)} \|y_r - \mu_r\|_2^2}_{\text{Summierter Approximationsfehler aller Blätter}} .$$

Frage: Welche Auswirkung hat ein niedriger Wert von γ?

Antwort: Verbessert die Annäherung auf Kosten der Vergrößerung des Quadtrees.

Algorithmus: Minimize(z,r,γ)

Input: Bilddaten $z \in \mathbb{R}^S$, Rechteck $r \subset S$, Regularisierung $\gamma > 0$
Output: $\min_T \gamma|L(T)| + \|z - \mu_{L(T)}\|_2^2$

if $|r| = 0$ **then return** 0
$m \leftarrow \gamma + \sum_{s \in r}(z_s - \mu_r)^2$
if $|r| > 1$ **then**
    Split r into r_{ll},r_{lr},r_{ul},r_{ur}
    $m_1 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ll}, \gamma)$; $m_2 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{lr}, \gamma)$
    $m_3 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ul}, \gamma)$; $m_4 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ur}, \gamma)$
    $m' \leftarrow m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
else
    $m' \leftarrow \infty$
if $m' < m$ **then** $m \leftarrow m'$
return m

5. Dynamische Programmierung

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal berechnet
  - Die Idee ist, einfach **die Ergebnisse von Teilproblemen zu speichern**, damit wir sie später bei Bedarf nicht neu berechnen müssen.

Dynamische Programmierung: Idee

Frage: Welche der folgenden Fibonacci-Implementierungen würde besser abschneiden?

```
// top down
int fib(int n) {
    if (n <= 1) {
        return n;
    }
    return fib(n - 1) + fib(n - 2);
}
```

```
// bottom up
int fib2(int n) {
    std::vector<int> f(n + 1);
    f[0] = 0;
    f[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; ++i) {
        f[i] = f[i - 1] + f[i - 2];
    }
    return f[n];
}
```

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat **optimale Substruktur**.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat **überlappende Teilprobleme**, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es **zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten** geben.

Vergleich

- **Memoisierung:**
  - Top-down-Ansatz
  - Rekursion mit Caching von Ergebnissen
  - Berechnet Werte bei Bedarf träge
  - Kann effizienter sein, wenn nur wenige Werte benötigt werden
- **Bottom-up-Dynamische Programmierung:**
  - Iterativer Ansatz
  - Erstellt Lösungen aus kleineren Teilproblemen
  - Berechnet alle Werte in einer vordefinierten Reihenfolge
  - Kann effizienter sein, wenn alle Werte benötigt werden

Vergleich

Frage

In welchen der folgenden Fälle könnte die Memoisierung deutlich effizienter sein als die Bottom-up-Dynamische Programmierung?

1. Wenn alle Werte für das endgültige Ergebnis erforderlich sind
2. Wenn nur einige Werte für das endgültige Ergebnis erforderlich sind
3. Wenn das Problem überlappende Teilprobleme hat
4. Wenn das Problem iterativ gelöst werden kann

Vergleich

Antwort

Die Memoisierung könnte deutlich effizienter sein als die Bottom-up-Dynamische Programmierung, wenn nur einige Werte für das endgültige Ergebnis erforderlich sind

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte:

- **Definition der Teilprobleme / der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Rekursion: Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Topologische Ordnung: Berechnungsreihenfolge**: In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Lösung und Laufzeit**: Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen? Laufzeit des Algorithmus?

Überprüfung

Wählen Sie aus, welche Eigenschaften ein Problem haben muss, damit ein dynamischer Programmieransatz geeignet ist:

- Optimale Teilstruktur
- Echtzeit-Problembehandlung
- Unabhängige Teilprobleme
- Speichereffiziente Lösung
- Rekursive Struktur
- Überlappende Teilprobleme
- Zirkuläre Abhängigkeiten
- Tabellierung oder Memoisierungspotenzial
- Kleiner Zustandsraum

Antworten

Wählen Sie die Problemmerkmale, die benötigt werden, damit die dynamische Programmierung angemessen ist:

- **Optimale Teilstruktur**
- Echtzeit-Problembehandlung
- Unabhängige Teilprobleme
- Speichereffiziente Lösung
- **Rekursive Struktur**
- **Überlappende Teilprobleme**
- Zirkuläre Abhängigkeiten
- **Tabellierung oder Memoisierungspotenzial**
- Kleiner Zustandsraum

Beispiel: Münzwechsel-Problem

Definition

Gegeben sei ein Satz von Münzwerten und ein Zielbetrag. Finde die minimale Anzahl von Münzen, die benötigt werden, um den Zielbetrag zu erreichen. Beachte, dass dieselbe Münzwert mehrmals verwendet werden kann.

Beispiel

Gegeben seien Münzen = [2, 4, 7] und Zielbetrag = 8, die Lösung ist 2 (4 + 4).

Bemerkung

Wenn das Problem keine Lösung hat, sollte der Algorithmus -1 zurückgeben.

Münzwechsel-Problem

Aufgabe

Entwerfen Sie einen rekursiven Algorithmus, um die Aufgabe zu lösen.

Münzwechsel Rekursive Lösung

```
int coinChange(const std::vector<int>& coins, int amount) {
    if (amount == 0) {
        return 0;
    }
    int minCoins = INT_MAX;
    for (int coin : coins) {
        if (amount - coin >= 0) {
            int temp = coinChange(coins, amount - coin);
            if (temp != -1) {
                minCoins = std::min(minCoins, temp + 1);
            }
        }
    }
    return minCoins == INT_MAX ? -1 : minCoins;
}
```

Münzwechsel-Problem

Aufgabe

Entwerfen Sie einen DP-Algorithmus, um die Aufgabe zu lösen.

Münzwechsel Dynamische Programmierung

Wir können die dynamische Programmierung verwenden, um dieses Problem zu lösen, indem wir ein eindimensionales Array erstellen, bei dem `dp[i]` die minimale Anzahl von Münzen darstellt, die zur Herstellung des Betrags i benötigt werden:

- Setze jedes Element in `dp` auf einen Wert, der größer ist als die maximal mögliche Anzahl von Münzen.
- Setze `dp[0] = 0`.
- Für jede Münze `c`, iteriere durch das Array und aktualisiere `dp[i]`, wenn `dp[i-c]+1` einen niedrigeren Wert hat.

Coin Change DP Solution

```
int coinChange(const std::vector<int>& coins, int amount) {
    std::vector<int> dp(amount + 1, amount + 1);
    dp[0] = 0;
    for (int coin : coins) {
        for (int i = coin; i <= amount; ++i) {
            dp[i] = std::min(dp[i], dp[i - coin] + 1);
        }
    }
    return dp[amount] <= amount ? dp[amount] : -1;
}
```

DP Visualization

Münzen: [1, 2, 4] Ziel: 8

`i`	0	1	2	3	4	5	6	7	8
`dp[i]`	0	∞1	∞21	∞32	∞421	∞532	∞632	∞743	∞842

Anfangszustand des `dp`-Arrays. Nach der Verarbeitung der ersten Münze. Nach der Verarbeitung der zweiten Münze. Nach der Verarbeitung der dritten und letzten Münze. Antwort: `dp[8] = 2`.

Münzwechsel-Zeitkomplexität

Frage

Wie vergleicht sich die Zeitkomplexität des DP-Algorithmus mit dem naiven rekursiven Algorithmus?

Naiver Algorithmus

Der naive Algorithmus hat eine exponentielle Zeitkomplexität von $O(c^n)$, wobei c die Anzahl der Münzwerte und n der Zielbetrag ist.

Dynamischer Programmieralgorithmus

Der Algorithmus der dynamischen Programmierung hat eine polynomielle Zeitkomplexität von $O(c \cdot n)$, wobei c die Anzahl der Münzwerte und n der Zielbetrag ist.

Code-Beispiel

Exercise class 08: Quadtrees and Dynamic Programming auf Code-Expert

- Region Point Quadtree
- Maximum sum of an increasing subsequence

7. Tipps zu [code]expert

Tipps für nächste [code]expert -Aufgaben

Aufgabe "Image Segmentation"

- Viel Mathematik und Nachdenken
- Viel Algorithmus implementieren
- Wenig Code (etwa 20 Zeilen)

Aufgabe "Enumerating Palindromes"

- Verwendet das Rezept
- Verwendet nicht ChatGPT

Aufgabe "Maximum Sum Triangle"

- Wichtig!
- Verwendet das Rezept
- Lasst euch Zeit

Aufgabe "Maximum average sum partition of an array"

- Verwendet das Rezept

8. Outro

Allgemeine Fragen?

Bis zum nächsten Mal

Schönes Wochenende!