

Aufgabe 1 – Dreiecks Überdeckung

Sei P eine endliche Menge von Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Gerade liegen. Wir sagen, ein Dreieck überdeckt einen Punkt p , falls p im Innern des Dreiecks, auf dessen Kanten oder auf einem der Eckpunkte liegt. Wir nennen ein Dreieck *erlaubt*, wenn *alle* seine Eckpunkte Punkte in P sind.

Sei $\Delta(P)$ die minimale Anzahl erlaubter Dreiecke, sodass jeder Punkt in P von (mindestens) einem dieser Dreiecke überdeckt ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Approximation für $\Delta(P)$ zu finden.

- (a) Sei $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Sequenz von n Punkten, die die Eckpunkte eines konvexen Polygons bilden. Das heisst, dass für jedes $i = 1, \dots, n$ alle Punkte ausser x_i und x_{i+1} links von der gerichteten Geraden $x_i x_{i+1}$ liegen (wobei wir x_{n+1} als x_1 interpretieren). Bestimme den Wert von $\Delta(Q)$ in Abhängigkeit von n (mit Beweis).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass jedes erlaubte Dreieck keine Punkte von Q ausser dessen Eckpunkte überdeckt.

- (b) Sei P nun eine beliebige Punktmenge und sei k die Anzahl der Eckpunkte der konvexen Hülle von P . Beweise, dass $\Delta(P) \geq k/3$.
- (c) Seien P und k wie in (b) definiert. Beweise $\Delta(P) < k$.
- (d) Konstruiere einen Algorithmus, der eine 3-Approximation von $\Delta(P)$ findet. Zeige die Korrektheit des Algorithmus und gib seine Laufzeit (in Abhängigkeit von $|P|$) an.

Hinweis: Sie dürfen die Aussagen von (a) (b) und (c) für die Lösung von (d) verwenden, auch wenn sie diese Teilaufgaben nicht gelöst haben.