Algorithms and Probability Exercise Session 5



https://n.ethz.ch/~ahmala/anw

Aufgabe 1 – Jass-Karten

Ein Jass-Kartenspiel besteht aus 36 Karten mit vier Farben (Rosen, Schellen, Eichel, Schilten) und neun Werten (6, 7, 8, 9, 10, Under, Ober, König, Ass). Die Karten werden gemischt und zufällig auf 9 Stapel S_1, \ldots, S_9 mit je vier Karten aufgeteilt. Sie dürfen sich nun aus jedem Stapel eine Karte aussuchen. Können Sie die Wahl so treffen, dass Sie am Ende eine vollständige Strasse ausgewählt haben (also jeden der 9 Kartenwerte genau einmal)?

- (a) Finden Sie einen Algorithmus, der als Input S_1, \ldots, S_9 (wie oben beschrieben) nimmt, und als Output angibt, ob eine solche Wahl möglich ist.
- (b) Geben Sie auch einen (effizienten) Algorithmus an, der eine Lösung berechnet. (Der also ausgibt, welche Karte Sie von welchem Stapel auswählen sollen, um eine vollständige Strasse zu erhalten.)

Hinweis: Obwohl die Fragestellungen scheinbar nichts mit Graphen zu tun haben, lässt sich das Problem als graphentheoretisches Problem formulieren. Geben Sie eine solche Formulierung an. Dazu müssen Sie insbesondere genau beschreiben, welchen Graphen G = (V, E) Sie betrachten. (Was ist V? Was ist E?) Anschliessend können Sie beschreiben, was Sie über G wissen, und was Ihnen dieses Wissen über die ursprüngliche Fragestellung verrät. Dafür dürfen Sie in der Vorlesung beschriebene Algorithmen zitieren, selbst wenn dort die Implementierung nicht besprochen wurde. Achten Sie jedoch darauf, dass die Algorithmen in der Vorlesung nur für einfache Graphen beschrieben wurden.

Different Ways of Picking Elements

	order matters	order does not matter
repetition allowed	n^k .	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
no repetition allowed	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

- 1) Drawing *k* cards from a deck of *n* cards.
- 2) Choosing which *k* items to buy from a store that has unlimited amounts of *n* different items.
- 3) Rolling an *n*-sided die *k* times.
- 4) The number of possible first *k* places on a scoreboard of *n* people

Can Ω (sample space) be infinite?

Aufgabe 1 – Verteilungen

(a) Alice und Bob werfen abwechselnd eine Münze. Wer zuerst "Kopf" wirft, gewinnt. Da Alice anfängt, darf Bob eine gezinkte Münze nehmen, die mit Wahrscheinlichkeit $1/2 \le p \le 1$ "Kopf" zeigt. Die Münze von Alice ist hingegen fair. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice gewinnt? Kann man p so wählen, dass das Spiel fair wird?

Birthday Paradox

Assume that birthdays are distributed uniformly and independently at random over 365 days of the year

Suppose we have m people in a room

What is the probability that there are (at least) two people who share the same birthday?

Alternatively, what is the probability that all m people have distinct birthdays?

consider "people" as balls. And "birthdays" as bins

throwing m balls into n bins

Calculate the probability that every ball falls into a distinct bin

Let A be the probability every ball fell into an empty bin

 $\Pr[A] = \Pr[\cap_{i=1}^{m} A_i]$

Let A be the probability every ball fell into an empty bin

- $\Pr[A] = \Pr[\cap_{i=1}^{m} A_i]$
 - $= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_2 \cap A_1] \cdots \Pr[A_m| \cap_{i=1}^{m-1} A_i].$

Random Variables

Is a "random variable" random?

Is a "random variable" variable?

Random Variables

Deterministic (non-random) Function

Indicator Random Variable

Expected Value

Average outcome of a random variable

Linearity of Expectation

Sum of random variables is equal to the sum of their individual expected values, regardless of whether they are independent

Expected number of cards you should turn before finding an ace?

4 aces in total out of 52 cards

Fun(!) Time

A standard deck of cards is shuffled. What is the chance that the third card from the top is either a diamond or an ace?

If you draw 13 random cards from a standard deck, what is the chance that they are all of the same suit? We shuffle a deck of cards and I deal you the 3, 4, and 5, I look at the next card and tell you that it is between 3 and 8 (inclusive). How likely is it that this card is a \$? The 2•, 3•, and 4• are face-down in random order. You want to select the 4•. You point to the leftmost card. A gust of wind blows, flipping the rightmost card and revealing that it is the 2•. Do you want to switch your choice from the leftmost to the middle? What is the expected value of a randomly drawn card from a standard deck? If you draw two cards randomly, what is the expected value of their sum? (A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13)

A

A

2

A standard deck of cards is shuffled. On average, how many cards will you have to draw until you draw the A&?

Try answering this question assuming you draw with replacement and then assuming you draw without replacement. 20 people are each holding a playing card. These cards are all shuffled and redistributed randomly. What is the expected number of people who get their original card back?

3

4

10 people are sitting in a circle. Each has their own deck of cards. They each shuffle their deck and draw a random card. If the card is red, the holder turns to shake hands with the player to their left. If the card is black, they turn to shake hands with the person to their right. How many handshakes are expected to succeed?

While inserting two jokers into a deck of cards, we unfortunately drop the 5 on the floor. We then shuffle the deck. What's the expected number of cards between the two jokers?

5