Algorithms and Probability

Exercise Session 6

https://n.ethz.ch/~ahmala/anw

MINITEST

Time limit: 11 minutes

Number of questions: 11

Threshold to get 1 point: 7 correct answers

Threshold to get 2 points: 9 correct answers

No calculator needed at all but you can use if you want!

PASSWORD:

PASSWORD: harmony

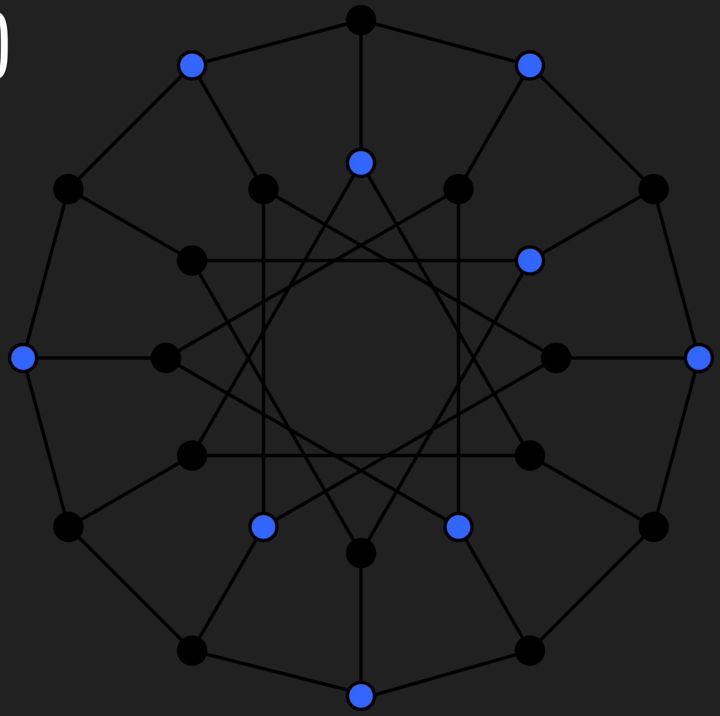
Peer Grading Task

Check master solution

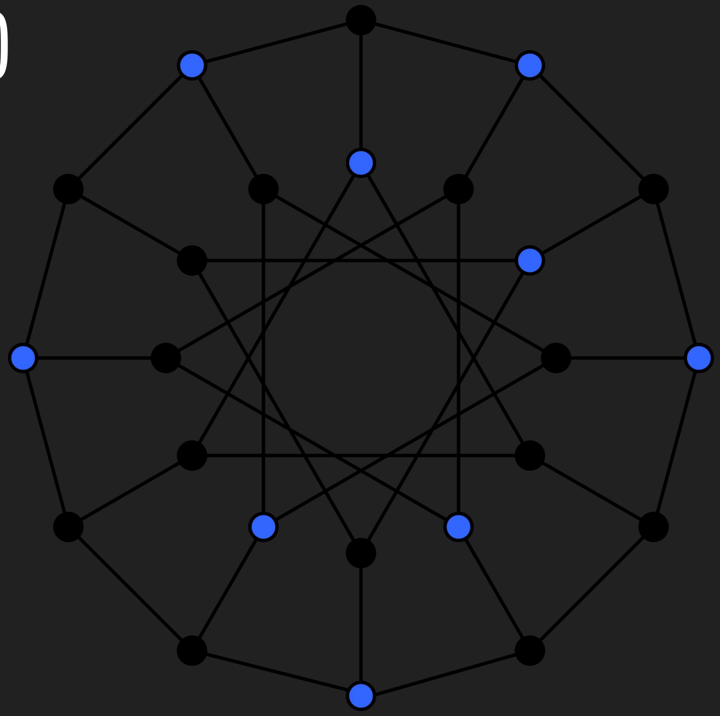
Stabile Menge (Independent Set) (Stable Set)

Set S of vertices such that for every two vertices in S, there is no edge connecting the two.

Equivalently, each edge in the graph has at most one endpoint in S.



Stabile Menge (Independent Set) (Stable Set)



Algorithm:

1) Add each node independently with probability p.
2) For each remaining edge, remove a random node

Stabile Menge (Independent Set) (Stable Set)

Set S of vertices such that for every two vertices in S, there is no edge connecting the two.

Equivalently, each edge in the graph has at most one endpoint in S.

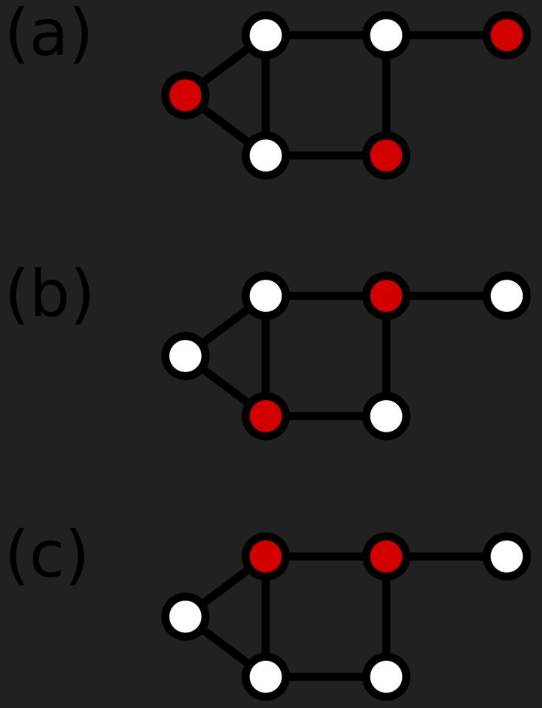
Maximum Stable Set: Independent set of largest possible size for a given graph
NP-Hard

Maximal Stable Set: not a proper subset of another independent set

NP Complete

Dominante Menge

a dominating set for a graph G is a subset D of its vertices, such that any vertex of G is in D, or has a neighbor in D.



In Class Exercise

https://n.ethz.ch/~ahmala/anw/material/In_Class_Exercise_Week_6.pdf

Aufgabe 1 – *Dominante Menge*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine 'dominante Menge' $W \subseteq V$ ist eine Knotenmenge, sodass für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass entweder v selbst oder ein Nachbar von v in W enthalten ist. In dieser Aufgabe betrachten wir einen randomisierten Algorithmus, der eine dominante Menge findet und dem Algorithmus aus der Vorlesung zum Finden einer stabilen Menge ähnelt.

Wir nehmen an, dass G Minimalgrad mindestens $d > 1$ hat, d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat Grad $deg(v) \geq d$. Der Algorithms besteht aus zwei Runden. In der ersten Runde markieren wir jeden Knoten unabhängig von den anderen Knoten mit Wahrscheinlichkeit p (wobei $0 \leq p \leq 1$ gegeben ist). In der zweiten Runde betrachten wir jeden Knoten $v \in V$, wenn weder v noch einer seiner Nachbarn in der ersten Runde markiert wurden, so markieren wir v. Man sieht leicht, dass die Menge der markierten Knoten nach der zweiten Runde eine dominante Menge ist. Wir analysieren die Grösse dieser dominanten Menge im Folgenden.

(a) Sei X die Anzahl der Knoten, die in der ersten Runde markiert werden. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

(b) Sei $v \in V$ ein beliebiger (aber fixer) Knoten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass weder v noch einer der Nachbarn von v markiert wurde genau (die Antwort darf von v abhängen). Finden Sie eine obere Schranke für diese Wahrscheinlichkeit, die nur von d und p abhängt (und nicht von v).

(c) Sei Y die Anzahl der Knoten, die in der zweiten Runde markiert werden. Verwenden Sie (b) um eine obere Schranke für $\mathbb{E}[Y]$ zu finden.

(d) Zeigen Sie, dass die erwartete Grösse der dominanten Menge höchstens $n(p + e^{-p(d+1)})$ ist. *Hinweis:* Sie dürfen die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ ohne Beweis verwenden.

(e) Zeigen Sie, dass G eine dominante Menge der Grösse höchstens $n \cdot \frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$ enthält.

Definition 2.2.4 (Variance) *For a random variable* X *with* $\mu := \mathbb{E}[X]$*, we define its* variance *(Varianz) (sometimes written as* σ^2*) as*

$$Var[X] := \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)-\mu)^2 \Pr[\omega]$$

We also define the standard deviation $\sigma := \sqrt{Var}$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$

Theorem 2.2.4 *For any random variable* X *and* $a, b \in \mathbb{R}$ *we have*

$$Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$$

Exercise 13. Given is the following distribution of a random variable X

x	-4	-2	5	8	10
$f_X(x)$	0.25	0.10	0.20	0.15	0.30

Compute $\mathbb{E}[2X + 8]$ and $\text{Var}[2X + 8]$.

Ex 13 This exercise is mostly to show that we don't actually need to know Ω to calculate expected value and variance if we have the distribution. We can calculate the expected value as:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) = 4$$

We can get the variance as $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$. To calculate the first term, we can view it as a new random variable whose distribution is derived from X:

x^2	16	4	25	64	100
$f_{X^2}(x^2)$	0.25	0.10	0.20	0.15	0.30

And we can calculate this expected value in the same way as before to get:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in W_{X^2}} x \cdot f_{X^2}(x) = 49$$

We now have:

$$\mathbb{E}[X] = 4$$
$$\mathrm{Var}[X] = 49 - 4^2 = 33$$

And using the Linearity of Expectation and the corresponding rule for variance:

$$\mathbb{E}[2X + 8] = 2 \cdot \mathbb{E}[X] + 8 = 16$$
$$\mathrm{Var}[2X + 8] = 4 \cdot \mathrm{Var}[X] = 132$$