Aufgabe 1 – *Kleinster Umschliessender Ball*

In dieser Aufgabe sollen Sie den Algorithmus zum kleinsten umschliessenden Kreis auf den dreidimensionalen Fall übertragen.

(a) Zeigen Sie die dreidimensionale Variante des *Sampling Lemma*:
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Menge von n (nicht unbedingt verschiedenen) Punkten im dreidimensionalen Raum, $r \in \mathbb{N}$, und sei R zufällig gleichverteilt aus $\binom{P}{r}$. Sei X die Anzahl Punkte von P, die ausserhalb des kleinsten umschliessenden Balles $B(R)$ von R liegen. Dann ist $\mathbb{E}[X] \leq 4\frac{n-r}{r+1}$.

(b) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der als Input eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^3$ von n Punkten im dreidimensionalen Raum bekommt, und der in erwarteter Zeit $O(n \log n)$ den kleinsten umschliessenden Ball $B(P)$ von P bestimmt.

Sie brauchen dabei nicht genau die Datenstrukturen zu spezifizieren, die Sie verwenden. Insbesondere dürfen Sie davon ausgehen, dass Sie für gegebene Zahlen $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ in Zeit $O(n)$ einen Index i mit Wahrscheinlichkeit proportional zu d_i ziehen können, also mit $\Pr[i] = \frac{d_i}{D}$, wobei $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$ ist.

Hinweis: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Menge von n (nicht unbedingt verschiedenen) Punkten im dreidimensionalen Raum. Sie dürfen für die Aufgabe die folgenden Fakten ohne weitere Begründung verwenden.

1. $B(P)$ ist eindeutig bestimmt.
2. Ist $Q \subseteq P$, so ist $\mathrm{Vol}(B(Q)) \leq \mathrm{Vol}(B(P))$.
3. Für jede endliche Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt es eine Teilmenge $Q' \subseteq Q$ mit $|Q'| \leq 4$ sodass $B(Q') = B(Q)$.
   Insbesondere kann $essential(p, Q) = 1$ nur für höchstens vier Punkte $p \in Q$ erfüllt sein.

Hinweis zu (a): Gehen Sie wie im Beweis von Lemma 3.28 vor. Benutzen Sie dafür insbesondere die Grössen

$$out(p, R) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \notin B(R) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad essential(p, Q) := \begin{cases} 1 & \text{falls } B(Q \setminus \{p\}) \neq B(Q) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$