Analysis I - FS22

Anja Sjöström

Kapitel 1 · Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ vervollständigt $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ ist mit 2 Operationen versehen:

1) Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto x+y$
2) Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto xy$

Und eine Ordnungsrelation: $\leq$

S.1.2 $\mathbb{R}$ ist eine abelsche angeordnete Körper der Ordnungvollständig ist

Axiome der Addition

A1 Assoziativität $x+(y+z) = (x+y)+z$
A2 Neutrales Element $x+0 = x$
A3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x+y=0$, y eindeutig bestimmt durch $-x$
A4 Kommutativität $x+z = z+x$

Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
M2 Neutrales Element $x \cdot 1 = x$
M3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R}: x\cdot y = 1$, y eindeutig bestimmt durch x^{-1}
M4 Kommutativität $x\cdot z = z \cdot x$

Distributivität (D) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x \cdot z$

Ordnungsaxiome Konsistent mit $+$ und $\cdot$

O1 Reflexivität $x \leq x$
O2 Transitivität $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
O3 Anti-Symmetrie $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
O4 Total $\forall x,y$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$

Kompatibilität (mit Körper Axiome)

K1 $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
K2 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, xy \geq 0$

Alles gilt auch für $\mathbb{Q}$

Die Ordnungsvollständigkeit unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$

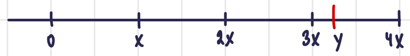
Ordnungsvollständigkeit (V)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ s.d
1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
2) $\forall a \in A, \forall b \in B$ gilt $a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ s.d $\forall a \in A: a \leq c$ und $\forall b \in B: c \leq b$

K.1.6 1) Eindeutigkeit der additiven und mult. Inversen
2) $0 \cdot x = 0$ (Assume there are two)
3) $(-1)\cdot x = -x$ $(-1)^2 = 1$
4) $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$
5) $y^2 \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$
6) $x \leq y$ und $u \leq v \Rightarrow x+u \leq y+v$
7) $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \Rightarrow x\cdot u \leq y \cdot v$

K.1.7 Archimedisches Prinzip
1) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$
2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq x < n+1$



S.1.8 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ $(t \geq 0)$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$. (mit $\sqrt{t}$ bezeichnet)

Beweis: OV und Archimedisches P. benutzen.

→ $\mathbb{Q}$ erfüllt das OV nicht

D.1.9 Seien $x, y \in \mathbb{R}$
1) $\max\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$
2) $\min\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{falls } y \leq x \end{cases}$
3) $|x| = \max\{x,-x\} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$

S.1.10 1) $|x| \geq 0$ 3) $|x+y| \leq |x| + |y|$
2) $|xy| = |x|\cdot|y|$ 4) $|x+y| \geq ||x|-|y||$

S.1.11 Young'sche Ungleichung
$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\boxed{2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2}$

Eine Intervall ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form:
1) Für $a \leq b$
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

2) Für $a \in \mathbb{R}$
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$
- $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}: a \geq x\}$
- $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R}: a > x\}$

3) $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

Def 1.12 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$
1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls $\forall a \in A$: $a \leq c \Rightarrow A$ heisst nach oben beschränkt
2) $c \in \mathbb{R}$ ist eine untere Schranke von A falls $\forall a \in A$: $c \leq a \Rightarrow A$ heisst nach unten beschränkt
3) Ein Element $M \in \mathbb{R}$ heisst Maximum von A falls $M \in A$ und M eine obere Schranke von A ist. $\max A$
4) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst Minimum von A falls $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist. $\min A$

A heisst beschränkt falls sie nach oben & unten beschränkt ist

S.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
(i) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A: $c := \sup A$ das Supremum von A
→ Die Menge der oberen Schranken von A stimmt mit $[\sup A, +\infty[$ überein $\sup A = \inf[\sup A, +\infty[$
(ii) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A: $d := \inf A$ das Infimum von A
→ Die Menge der unteren Schranken von A stimmt mit $]-\infty, \inf A]$ überein $\inf A = \sup]-\infty, \inf A]$
(iii) Falls $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ dann gilt $\sup A \leq \inf B$

K.1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$
1) Falls B nach oben beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B$
2) Falls B nach unten beschränkt ist, folgt $\inf B \leq \inf A$

→ Falls A unbeschränkt $\Rightarrow \inf A = -\infty$, $\sup A = +\infty$

Proof of inf / sup
→ State a lower / upper bound
→ Assume there is a greater / smaller one
→ Arrive at contradiction by

$c = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A: a \leq c) \wedge (\forall \varepsilon > 0: \exists a \in A \ a > c - \varepsilon)$
$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A: a \geq c) \wedge (\forall \varepsilon > 0: \exists a \in A \ a < c + \varepsilon)$

Proof techniques inf / sup
→ Always simplify the set to have single bounds → can do so by enumerating terms
- Polynomial: write in vertex form $a(x-h)^2 + k$ $h = -b/2a$ $k = f(h)$ $A = [k, +\infty[$
- Equations: write them out, solve, keep most restrictive bounds.
- 2 variables: separate A into $B + C$
- $(-1)^n$: separate A into $B \cup C$
- xy: sup → $(-,-),(+,+)$ inf → $(-,+),(+,-)$

S.3.2.1 (Thoma) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer
→ $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
→ $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
→ $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
→ $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
→ $\sup(cA) = c \sup A$, $c > 0$
→ $\sup(cA) = c \inf A$, $c < 0$

$A + B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

Def 1.18 1) Zwei Mengen X, Y sind gleichmächtig falls eine Bijektion $f: X \to Y$ gibt
2) Eine Menge X ist endlich, falls entweder $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$ s.d X und $\{1, \dots, n\}$ gleichmächtig sind
3) X ist abzählbar falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, gerade $\mathbb{N}$

S.1.20 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Kap 1.2 - Euklidische Raum

$n \geq 1$ $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(x,y) \longmapsto x+y$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(c,x) \longmapsto cx$

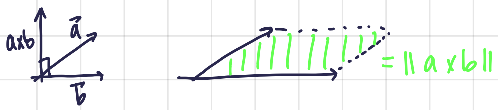
$(\mathbb{R}^n; +, \cdot)$ ist ein Vektorraum

Def - Skalarprodukt $\langle x,y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
(S1) Symmetrie $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
(S2) Bilinear $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$
(S3) Positiv definit $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Def - Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$
(N1) Positiv definit $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
(N3) Dreiecksungleichung $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Cauchy-Schwarz: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Def - Kreuzprodukt zwischen $a, b \in \mathbb{R}^3$:
$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(a,b) \longmapsto a \times b$

$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$



1) $(a+b)\times c = a \times c + b \times c$
2) anti-Symmetrie $a \times b = -b \times a$
3) Jacobi Identität $a\times(b\times c) + c\times(a\times b) + b\times(c\times a) = 0$

1.3 Komplexe Zahlen $(\mathbb{R}^2, \cdot, +)$

- Multiplikation $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
- Addition: $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(0,0)\cdot(x,y) = (0,0)$ $(1,0)\cdot(x,y) = (x,y)$

$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$

Körper mit Einselement $= (1,0)$
Nullelement $= (0,0)$

$\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x,0)$

$i := (0,1)$ $z := (x,y)$ "=" $x + iy$
$i^2 = (0,1)(0,1)$ "=" -1

Eigenschaften $z := (x,y) = (x,0)(1,0) + (y,0)(0,1)$

$\bar{z} = x - yi$

$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$

S.1.24 1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
2) $z\bar{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$

Kapitel 2 - Folgen und Reihen

Iterationsverfahren!

Def - Eine Folge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \longrightarrow M$, $n \longmapsto a_n$

Bild $:= a(n) = a_n$

Bisektion - Nullstelle von $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u_n)_{n\geq 0}$ $(v_n)_{n\geq 0}$ $(u_0, v_0) = (a,b)$

$x := \frac{u_n + v_n}{2}$ If $f(x) = 0$ return

2.1 Grenzwerte einer Folge

Def - Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst Konvergent falls es $\ell \in \mathbb{R}$

(1) gibt s.d $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $M(\varepsilon) := \{ n \in \mathbb{N} \mid a \notin]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\}$ endlich ist

Falls eine solche Zahl ℓ gibt, ist die eindeutig bestimmt

$\ell := \lim_{n\to\infty} a_n$ = Grenzwert / Limes der Folge a_n

Lemma Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann gibt e höchstens ein $\ell \in \mathbb{R}$ mit: $\forall \varepsilon > 0$ s.d. $M(\varepsilon)$ endlich ist.

Def - Eine Folge (a_n) konvergiert mit Grenzwert L falls

(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq N$ gilt $|a_n - L| < \varepsilon$

Lemma - (1) & (2) sind äquivalent.

Def - Divergent $\lim a_n$ existiert nicht ; $\lim a_n = \infty$

Def - Eine Folge heißt beschränkt falls $\{|a_n| \; n \in \mathbb{N}\}$ ist

- $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst Nullfolge, falls $\lim a_n = 0$

Konvergent $\Longrightarrow$ beschränkt

beschränkt $\not\Longrightarrow$ konvergent

Satz - $(a_n)_{n\geq 1}$ $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folge $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

1) $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ konvergent & $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$
2) $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konvergent & $\lim(a_n b_n) = a \cdot b$
3) Falls $b_n \neq 0, \forall n \geq 1, b \neq 0$ $\frac{a_n}{b_n}$ konvergent und $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$
4) Falls ein $k \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \; \forall n \geq k \Rightarrow a \leq b$

Satz - Sandwich theorem

$(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert L.

→ $k \in \mathbb{N}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für jede $n \geq k$ $\Rightarrow$ konvergiert c_n gegen L

→ Divergente Folgen können verschiedene Verhältniss haben

2.2 Satz von Weierstrass

Def - $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1} \; \forall n$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1} \; \forall n$

Satz 2.11 (Weierstrass)

1) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert
$\lim a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$
2) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert
$\lim a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$

beschränkt + monoton wachsend = konvergent

monoton + beschränkt $\neq$ konvergent Bsp. $a_n = -n$

→ Divergente Folge + beschränkt ✓ $a_n = (-1)^n$

Beispiele:

- $0 \leq q < 1$ $\lim n^a q^n = 0$ $r = \frac{1}{q}$ $\frac{n^a}{r^n} \longrightarrow 0$
  weil r^n wächst schneller
- $\lim q^n = 0$ $0 < q \leq 1$ $a_{n+1} / a_n = q$
- $\lim n^{1/n} = 1$
- $a_1 = c$ $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ $\lim a_n = \sqrt{c}$

→ Sei (a_n) konv. mit $\lim a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $b_n := a_{n+k}$ konv. mit $\lim b_n = a$

→ $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Lemma - Bernoulli Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ $x > -1$

2.3 Limes Superior & limes Inferior

Mit jeder beschränkten Folge (a_n) kann man zwei monotone Folgen (b_n) und (c_n) definieren die konvergieren.

Sei $n \geq 1$ $\forall n$ gilt

Def - $b_n := \inf\{a_k : k \geq n\} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$c_n := \sup\{a_k : k \geq n\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

Da $A_{n+1} \subseteq A_n$ folgt aus K.1.16 (weil A_n ist beschränkt)

$\sup A_{n+1} \leq \sup A_n \Rightarrow c_{n+1} \leq c_n \Rightarrow (c_n) \searrow$

$\inf A_n \leq \inf A_{n+1} \Rightarrow b_n \leq b_{n+1} \Rightarrow (b_n) \nearrow$

und $b_n = \inf A_n \leq \sup A_n = c_n$

→ Da beide b_n, c_n monoton und beschränkt sind, folgt nach Satz von Weierstrass dass b_n, c_n konvergieren

Def - $\lim b_n := \liminf a_n$

$\lim c_n := \limsup a_n$

Es gilt immer $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ da $b_n \leq c_n$

Lemma - (a_n) konv. gdw. (a_n) ist beschränkt und $\liminf a_n = \limsup a_n$

Solving lim sup / inf : write out $b_1, b_2, \dots, b_n$ (same c_n) have a general expression in terms of n

Take $\lim b_n$ and $\lim c_n$

2.4 Das Cauchy Kriterium

Entscheiden ob. konv. ohne Grenzwert zu kennen.

Def - Eine Folge (a_n) heisst Cauchy Folge falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$

S. Cauchy Kriterium Sei (a_n) eine Folge reelle Zahlen

a) Jede Cauchy Folge ist beschränkt
b) Jede konv. Folge ist eine Cauchy Folge
c) Jede Cauchy Folge ist konvergent

→ (a_n) ist nicht Cauchy $\Rightarrow$ a_n divergiert

→ Cauchy gilt nur in vollständige Räume

Tricks - Cauchy Folgen

- Assume $m \geq n$, set $m = 2n$ (smth to cancel out all n's)
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. falls $\sum_{k=1}^{n}$ eine Cauchy Folge ist.

2.5 Der Satz von Bolzano - Weierstrass

Def - Eine Teilfolge einer Folge $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine Folge $b: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ so dass eine streng monoton wachsende Abbildung $\ell: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $b = a \circ \ell$

(b_n) ist eine Folge $b_n = a_{\ell(n)}$ und $\ell(n) < \ell(n+1)$

Satz - Bolzano Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konv. Teilfolge.

→ Falls a_n konv. ist und $\lim a_n = a$ dann ist jede Teilfolge b konv. mit $\lim b_n = a$

→ Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konv. Teilfolge (b_n) $\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n$

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Def - Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$, $n \longmapsto a_n$

Def - Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ heisst beschränkt falls es $c > 0$ gibt mit $\|a_n\| \leq c$ $\forall n \geq 1$

Def - Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ konvergiert falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n \geq N$ $\|a_n - a\| < \varepsilon$

→ $\lim \|a_n - a\| = 0$

Satz Sei $b = (b_1, \dots, b_d)$. Die folgende Aussagen sind äquiv

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ 2) $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j$ $\forall 1 \leq j \leq d$

Satz

1) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert $\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchy Folge d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n, m \geq N$ gilt $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$
2) Jede beschränkte Folge hat eine konv. Teilfolge (B.-W.)

Satz Seien $(a_n), (b_n)$ konv. Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$
2) $\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim(a_n)$

Satz - Folgen in $\mathbb{C}$

Sei $(z_n), (w_n) \in \mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$, $\lim w_n = w$

Dann gilt
1) $\bar{z}_n \longrightarrow \bar{z}$
2) $\|z_n\| \longrightarrow \|z\|$
3) $z_n w_n \longrightarrow zw$
4) Falls $w \neq 0, w_n \neq 0$ $\forall n$ $\frac{z_n}{w_n} \longrightarrow \frac{z}{w}$

2.7 Reihen

→ Folge der Partielsummen $S_n := a_1 + \dots + a_n$

Def - Eine Reihe ist eine unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$ einer Folge (a_n)

Def - Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert falls die Folge der Partielsummen $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

$\Rightarrow$ Die Limes ist mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Die Geometrische Reihe $q \in \mathbb{C}$ $|q| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2$ $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$

$q S_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + q^n$ $S_n - q S_n = 1 - q^n$

$S_n = 1 + \cancel{q} + \dots + \cancel{q^{n-1}}$ $(1-q) S_n = 1 - q^n$

$\lim S_n = \frac{1}{1-q} \lim(1 - q^n) = \frac{1}{1-q}$

$$\boxed{\text{Für } |q| < 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

Folgen vs. Reihen

→ Wie eine Folge, falls (a_n) konv., konv. auch $b_n := a_{n+k}$

→ Beim Weglassen von Glieder ändert sich der Grenzwert.

Die Harmonische Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert weil $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nicht Cauchy ist.

→ konv. für $s > 1$ $\left(\frac{1}{k^s}\right)$

Die Teleskop Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\lim S_n = 1$ $= 1 - \frac{1}{n+1}$

⚠ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ist FALSCH

Satz

Seien $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent, $\alpha \in \mathbb{C}$

1) $\sum (a_k \pm b_k)$ ist konvergent und
$$\sum (a_k \pm b_k) = \sum a_k + \sum b_k$$
2) $\sum \alpha a_k$ konv. und $= \alpha \sum a_k$

Satz - Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|S_n - S_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N$ i.e $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

$$\boxed{\sum a_k \text{ konv} \Leftrightarrow S_n \text{ konv} \Leftrightarrow S_n \text{ Cauchy}}$$

Satz - Notwendige Bedingung für Konvergenz

Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent so muss gelten
$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0} \qquad \boxed{\lim a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k \text{ div.}}$$

Satz - Weierstrass Reihen

Sei $a_k \geq 0$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\Leftrightarrow$ die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist.

* (S_n) mon. wachsend $S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n$

Kor.

Vergleich Satz / Majorenten- Minorenten Kriterium

Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ mit $0 \leq a_k \leq b_k \;\; \forall k \geq K$. Gilt:

1) $\sum b_k$ konvergiert $\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert
2) $\sum a_k$ divergiert $\Rightarrow \sum b_k$ divergiert

Beispiele:
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$ $\quad \sum \frac{1}{k(k+1)}$ konv.
  $\Rightarrow \sum \frac{1}{k^2}$ und $\sum \frac{1}{k^s}$ konv. $s > 1$
- $\sum \frac{1}{k}$ div. $\quad \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k} \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ div.
- $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ $\quad \sum \frac{1}{2^{k-1}}$ konv. $\Rightarrow \sum \frac{1}{k!}$ konv.

Beweis: b_k konv. & $b_k \geq 0 \Rightarrow S_n$ nach oben beschränkt
$\Rightarrow U_n$ nach oben beschränkt & $a_k \geq 0$
$\Rightarrow$ (Weierstrass) (S_n) konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

Absolut Konvergenz

Def – Eine Reihe $\sum a_k$ ist absolut konvergent, falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum |a_k|$ konvergiert

$$\boxed{\sum |a_k| \text{ konvergent} \Rightarrow \sum a_k \text{ konvergent}}$$

Satz

Eine abs. konvergente Reihe $\sum a_k$ ist auch konv. und es gilt
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

→ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \geq 0 \Rightarrow$ kann Weierstrass anwenden

Der alternierende Harmonische Reihe

→ Gute Gegenbeispiel für abs. konvergenz → bedingt konvergent
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$
→ Spezialfall von Satz von Leibniz

Satz von Leibniz

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0 \;\forall n$ und $\lim a_n = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$

und es gilt $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$ wobei $S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$

Def – Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ falls es eine bijektive Abbildung $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $a_n' = a_{\phi(n)}$.

Satz (Dirichlet)

Falls $\sum_{n=1}^{\infty}$ absolut konvergiert ($\sum |a_k|$ konv.) dann jede Umordnung der Reihe hat denselben Grenzwert.

Satz (Riemann)

Sei $\sum a_n$ eine konv. Reihe (aber nicht abs. konv.). Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Umordnung der Reihe der gegen A konvergiert.

Hinreichende Bedingungen für abs. konvergenz

→ basiert auf Vergleichsatz & Geometrische Reihe

Satz (Quotientkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \;\; \forall n \geq 1$

1) Falls $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dann konvergiert die Reihe absolut.
2) Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ divergiert die Reihe

→ Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und gleich L ist mit $L < 1$ so ist $\sum a_n$ abs konv.
→ Falls $L > 1$ ist $\sum a_n$ divergent
→ Falls $L = 1$ versagt das Quotientkriterium

Exponentielles Reihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ (mittels Quotientkriterium)

Beispiele
- $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k$ ist für $|q| < 1$ abs. konv.
- Calculate $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ and set the necessary bounds

Satz (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge

1) Falls $\limsup (|a_n|^{1/n}) = \limsup (\sqrt[n]{|a_n|}) < 1$ dann konv. $\sum a_n$ absolut
2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$ divergieren $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$

Falls $\lim (|a_n|^{1/n}) = L$
→ $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv. absolut
→ $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div.

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Potenzreihe

Def – Sei $(c_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$ ist definiert durch
$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

→ $\exp(z) = p(z)$ mit $c_k = \frac{1}{k!}$ konv. für alle $z \in \mathbb{C}$

Satz

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ wobei
$$\rho := \begin{cases} \infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0 \end{cases}$$

$\sum c_k z^k$ ist divergent für alle $|z| > \rho$

→ Falls $\{|c_k|^{1/k} \mid k \geq 1\}$ nicht beschränkt ist wir $\rho = 0$
→ Falls $\{|c_k|^{1/k} \mid k \geq 1\}$ beschränkt ist und zudem $\limsup |c_k|^{1/k} = 0$ setzen wir $\rho = \infty$

Riemann Zeta Funktion

Sei $s \in \mathbb{R}$
$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
Wurzel / Quotient K. versagen

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{< \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{< \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} = \frac{1}{4^{s-1}}}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^2)^{s-1}} + \frac{1}{(2^3)^{s-1}} = 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{mit } q = \frac{1}{2^{s-1}}$$

→ Für $s > 1$ $\; |q| = \left|\frac{1}{2^{s-1}}\right| < 1$

Nach Vergleichsatz $\zeta(s) < \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$ ist konvergent

→ Für $0 < s < 1$ gilt $\frac{1}{k} < \frac{1}{k^s}$ Da $\sum \frac{1}{k}$ div., divergiert auch $\zeta(s)$ für $0 < s < 1$

Multiplikation von Reihen

Def – $a_k b_\ell := c_{k\ell}$

Satz (Cauchy)

Wir nehmen an, dass es $B > 0$ gibt sodass
$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |c_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$
Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:
$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \;\; \forall i \geq 0$ und $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} \;\; \forall j \geq 0$
sowie $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$ und es gilt
$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$
zudem konv. jede lineare Anordnung absolut mit denselben lim.

Def – $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0}^{\infty} c_{ij}$ falls es eine Bijektion $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = c_{\phi(k)}$

Def – Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0} a_{n-j} b_j\right)$$

Satz

Falls die Reihen $\sum a_i$, $\sum b_j$ abs. konvergieren so konv. ihr Cauchy Produkt und es gilt:
$$\sum_{i=0} \sum_{j=0} a_i b_j = \sum_{j=0} \sum_{i=0} a_i b_j$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right)$$

Satz

$\forall x, y \in \mathbb{C} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Satz

$\forall n$ sei $f_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge ((f_n) Folge der Folgen)
Wir nehmen an, dass

1) $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
2) Es gibt eine Funktion $g: \mathbb{N} \to [0, \infty[$ so dass
   a) $|f_n(j)| \leq g(j) \;\; \forall j \geq 0 \; \forall n \geq 0$
   b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$$
und
$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(j)$$

Korollar

$\forall z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ und
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$f_n(k) := \begin{cases} \dfrac{z^k}{k!} \dfrac{n!}{(n-k)!\, n^k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k \geq n+1 \end{cases}$$

$g(k) := \frac{|z|^k}{k!} \qquad \lim f_n(k) = \frac{z^k}{k!} =: f(k)$

Die Teleskop Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$ konv. falls (b_n) konv.

Alternierende Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit a_n mon fallend und $\lim a_n = 0$ konv.

Methoden – konvergent

1. Does it resemble a known Type ?
2. Is $\lim a_n = 0$ NO → div.
3. Quotient Kriterium YES → done
4. Wurzel Kriterium YES → done
5. Does it have a konv. Majoranten $\sum b_n$ YES → konv.
6. Div. Minoranten ? YES → div.

Gegenbeispiel Cauchy Produkt

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = \sum a_k = \sum b_j$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$ konv. nicht

Kap 3.2 Stetigkeit

Def - Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass $\forall x \in D$ gilt $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

i.e. $f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

Satz

Sei $x_0 \in D$ $f: D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist in x_0 stetig $\Leftrightarrow$ $\forall (a_n)_{n \geq 1}$ in D mit $\lim a_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ $= f(\lim_{n\to\infty} a_n)$

Korollar

Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ beide stetig
Dann sind $f+g$, λf, fg in x_0 stetig
Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig (aber auf D achten)

Def - Eine Polynomiale Funktion $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form $P(x) := a_n x^n + \dots + a_0$ wobei $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$
Falls $a_n \neq 0$, ist n der Grad von P

Korollar

- Alle Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig
- $P/Q : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \to \mathbb{R}$ stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$

Satz

$f: D_1 \to \mathbb{R}$, $g: D_2 \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sowie $x_0 \in D_1$
so ist $g \circ f: D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig

Lemma

$x_0 \in \mathbb{R}$, f, g stetig in x_0. Dann sind $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ stetig in x_0

Indikator Funktionen

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

3.3 Der Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf I
Dann $\forall y \in [f(a), f(b)]$ falls $f(a) \leq f(b)$ $y \in [f(b), f(a)]$ sonst
gibt es mind. ein $c \in [a, b]$ falls $a \leq b$ $c \in [b, a]$ sonst
mit $f(c) = y$

1) Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig Falls $f(a)f(b) < 0$ dann $\exists c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$

2) Sei $P(x)$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade
$\Rightarrow$ Besitzt P mind. eine Nullstelle in $\mathbb{R}$

3.4 Der Min-Max Satz

Def - Ein Intervall I ist kompakt falls es von der Form $I = [a, b]$ mit $a \leq b$ ist

Satz - min-max Satz

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakte Interval. Dann gibt es $u \in [a, b]$ und $v \in [a, b]$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ $\forall x \in [a, b]$
Insbesondere ist $f([a, b])$ beschränkt und $f(u) = \min_{[a,b]} f$, $f(v) = \max_{[a,b]} f$ (D.h sup & inf angenommen)

Korollar

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ kompakt, f stetig. Dann Bild $f = f(I)$ ist auch ein kompakte Interval $J = [\min f, \max f] = [f(u), f(v)]$

3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

Satz

Sei I ein Intervall $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, f ist streng monoton.
Dann ist das Bild von f $f(I) =: J$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$ ist auch streng monoton & stetig

3.6 Die Exponentialfunktion

Satz

$\exp: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist streng mon. wachsend, stetig & surjektiv

Korollar - der natürliche Logarithmus

$\ln:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist eine streng mon. wachsende, stetige, bijektive Funktion, wobei
1) $\ln 1 = 0$
2) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\forall a, b \in]0, +\infty[$

→ $\exp(\ln x) = x$
→ $\exp(x) = \exp(x + y - y) = \exp(y) \exp(x - y)$

Allgemeine Potenze Für $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ $x^a := \exp(a \ln x)$
Insbesondere $x^0 = 1$ $\forall x > 0$

Satz

1) Für $a > 0$ ist $x \mapsto x^a$ stetig, streng mon wach., bijektiv
2) Für $a < 0$ ist $x \mapsto x^a$ stetig, streng mon fall., bijektiv
3) $\ln(x^a) = a \ln x$ $\forall x > 0$
4) $x^a x^b = x^{a+b}$
5) $(x^a)^b = x^{ab}$ $\forall x > 0$

3.7 Konvergenz von Funktionfolgen

Def - Eine Funktionfolge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \{f: D \to \mathbb{N}\}$, $n \longmapsto f_n: D \to \mathbb{R}$

Für jedes n, f_n ist eine Abbildung

Def - Die Funktionfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\boxed{\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d } \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

N hängt von ε und x ab!

→ i.e der Grenzwertfunktion ist nicht stetig

Bsp. $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$ $f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Def - Die Folge (f_n) $f_n: D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f: D \to \mathbb{R}$ falls gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d } \forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in D \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

N hängt nur von ε ab

Satz

Sei $D \in \mathbb{R}$ und $f_n: D \to \mathbb{R}$ eine Funktionfolge bestehend aus im D stetigen Funktionen, die in D gleichmässig gegen $f: D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f in D stetig

→ $f_n \xrightarrow{Gl.} f$ falls $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

Satz - Cauchy Kriterium

Die Funktionfolge $f_n: D \to \mathbb{R}$ konv. gleichmässig in D
$\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $\forall m, n \geq N$ und $\forall x \in D$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Def - Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in D falls die durch $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ def. Folge gleichmässig konvergiert

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ $f_n: D \to \mathbb{R}$ eine Folge von stetigen Funktionen
Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in D$ und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konv. Dann konv. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmässig in D und deren Grenzwert $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine in D stetige Funktion

Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < \rho$
Dann gilt $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$
Insbesondere ist $f:]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

3.8 Trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

→ Aus Quotientenkriterium konv. $\sin z$ und $\cos z$ $\forall z$ absolut

Satz

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ $\quad$ $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ $\quad$ sind stetig

Satz

1) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2) $\cos z = \cos(-z)$ gerade
   $\sin z = -\sin z$ ungerade
3) $\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ $\quad$ $\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$
4) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
   $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
5) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Korollar $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

3.8 Die Kreiszahl π

Lemma (Nach Satz von Leibniz)

$a_1 - a_2 \le \sin x \le a_1 \qquad x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x \qquad \forall\, 0 \le x \le \sqrt{6}$

→ π ist definiert als die kleinste von 0 verschieden Nullstelle von sin

Satz

sin hat auf $]0,\infty[$ mindestens eine Nullstelle $\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin t = 0\}$

Dann gilt 1) $\sin \pi = 0$ und $\pi \in]2,4[$
2) $\forall x \in]0,\pi[\quad \sin x > 0$
3) $e^{i\pi/2} = i$

Korollar 1) $e^{i\pi} = -1 \qquad e^{2\pi i} = 1$
2) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
   $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3) $\sin(x+\pi) = -\sin x$
   $\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4) $\cos(x+\pi) = -\cos x$
   $\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5) Nullstellen von $\sin x = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin x > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$
   $\sin x < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$
6) Nullstellen von $\cos x = \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
   $\cos x > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$
   $\cos x < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[$

Def - Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi k$, definieren wir die **Tangensfunktion** $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$

Für $z \neq \pi k$ **Cotangensfunktion** $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$

3.10 Grenzwert von Funktionen

Falls f in x_0 stetig, brauchen wir dass f im Punkt x_0 definiert ist.
$x \to x_0$ (x_0 muss nicht in x sein)

Def - $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$
$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$
Jedes Intervall von x_0 hat mind. einen Punkt in D der nicht x_0 ist
$D' = \{$ alle Häufungspunkte von $D\}$

Def - Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 bezeichnet mit:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\boxed{\text{Falls } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \quad |f(x) - A| < \varepsilon}$$

→ $f(x)$ muss nicht an der Stelle x_0 definiert sein

→ Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$
$\Longleftrightarrow$
$\forall (a_n)_{n \ge 1} \in D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim a_n = x_0$: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$

→ Falls $x_0 \in D$. Dann ist f in x_0 stetig
$\Longleftrightarrow$
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$

f in x_0 stetig $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ in } x_0 \text{ definiert} \\ \lim_{x \to x_0} f \text{ existiert} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Lemma

1) Falls $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D'$
   $g: D \to \mathbb{R}$
   $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$
   Dann $\lim_{x \to x_0} (f \pm g) = A \pm B$ und $\lim_{x \to x_0} (fg) = AB$
2) Falls $f \le g$ so folgt $A \le B$
3) Sandwichsatz - Falls $g_1 \le f \le g_2$ mit $\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2 = L$
   Dann existiert $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ wegen $x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x$

Def - Sei $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 ist ein Häufungspunkt von $D \cap]x_0, \infty[$
Falls der Grenzwert der eingeschränkte Funktion
$f|_{D \cap]x_0, \infty[}$ für $x \to x_0$ existiert wird er mit $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ bezeichnet - **rechtseitigen Grenzwert**

Falls der Grenzwert von $f|_{D \cap]-\infty, x_0[}$ für $x \to x_0$ existiert wird er mit $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ bezeichnet - **linkseitiger Grenzwert**

Def - $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[$
$f(x) > 1/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall N > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[$
$f(x) > N$

$\lim_{x \to 0} x^a = a \Rightarrow \lim(\exp(a \ln x)) = 0$ weil $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Grenzwert in Unendlichen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$. Ist D nach oben unbeschränkt. so hat $f(x)$ für $x \to \infty$ den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ falls gilt
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 : \forall x \in D \ x > C \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

4. Differenzierbare Funktionen

Def - Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f heisst in x_0 **differenzierbar** falls der Grenzwert
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$
existiert
→ **Ableitung** von f an der Stelle x_0

Def - $f: D \to \mathbb{R}$ heisst auf D **differenzierbar** falls f für jeden Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall definiert die Kollektion aller $x_0 \mapsto f'(x_0)$ eine neue Funktion
$f': D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heisst die **Ableitungsfunktion** von f.

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$f(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ falls $x \neq x_0$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0}$

$f'(x_0) = f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$

$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

→ $\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0 = r(x_0)$

$\Rightarrow r(x)$ ist in x_0 stetig und gilt
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

Satz (Weierstrass)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Folgende Aussagen sind äquivalent
1) f ist in x_0 differenzierbar
2) $\exists m \in \mathbb{R}$, $r: D \to \mathbb{R}$ mit
   a) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   b) $r(x_0) = 0$ und r in x_0 stetig

Satz $f: D \to \mathbb{R}$, $x \in D$
f ist in x_0 diff. $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$, $r: D \to \mathbb{R}$ mit
a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
b) $r(x_0) = 0$ und $r(x)$ ist in x_0 differenzierbar
$\Rightarrow c = f'(x_0)$

Satz Setze $\phi(x) := f'(x_0) + r(x)$
f ist in x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Funktion $\phi: D \to \mathbb{R}$ die
a) in x_0 stetig ist
b) $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$
$\Big\} \ \phi(x_0) = f'(x_0)$

Korollar
Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D
f ist in x_0 differenzierbar $\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig

Satz $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt $f, g: D \to \mathbb{R}$ in x_0 diff.
Dann gelten:
1) $f+g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) fg ist in x_0 differenzierbar und $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3) Falls $g(x_0) \neq 0$ ist f/g in x_0 diff

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Derivatives table

x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$
x^a	$a x^{a-1}$

Satz – Kettenregel
Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt
Sei $f: D \to E$ in x_0 diff. s.d. $y_0 := f(x_0) \in E$ Häufungspunkt
Sei $g: E \to \mathbb{R}$ in y_0 diff. Dann ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 diff.

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Korollar
Sei $f: D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$.
Wir nehmen an dass f in x_0 diff. und $f'(x_0) \neq 0$
Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 diff.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Zentrale Sätze über die erste Ableitung

Def – Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$
1) f besitzt eine lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit
$f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
2) f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit
$f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
3) f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lok. min/max besitzt
4) f besitzt ein lokales Extrema in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

And diese Stellen ist die Steigung der Tangent Null oder $f'(x)$ nicht def.

Satz $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$. Wir nehmen an f in x_0 diff.
1) Falls $f'(x_0) > 0$, gibt es $\delta > 0$ mit
$f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
2) Falls $f'(x_0) < 0$, gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
3) f besitzt ein lokales Extrema in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Def – Eine kritische Stelle einer Funktion ist ein Punkt x_0 an der $f'(x_0)$ null oder undefiniert ist.

Satz – Rolle
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und in $]a,b[$ diff. Falls $f(a) = f(b)$ dann ist mindestens an einer Stelle $\xi \in]a,b[$ $f'(\xi) = 0$

Satz – Lagrange / Mittelwertsatz
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ diff. Dann gibt es mind. eine $\xi \in]a,b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

d.h. $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Steigung der Sekante — Steigung der Tangente

Korollar $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff.
1) Falls $f'(\xi) = 0$ $\forall \xi \in]a,b[$ ist f konstant
2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi)$ $\forall \xi \in]a,b[$ gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in]a,b[$
3) Falls $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in]a,b[$ ist f auf $]a,b[$ mon. wachs.
4) Falls $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in]a,b[$ ist f auf $]a,b[$ mon. fallend
5) $f'(x) > 0$ $\forall x \in]a,b[$ $\Rightarrow$ f strikt mon. wachsend
6) $f'(x) < 0$ $\forall x \in]a,b[$ $\Rightarrow$ f strikt mon. fallend
7) Falls es $M > 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ $\forall \xi \in]a,b[$ dann folgt $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$

Trigonometrische Funktionen
1) arcsin: $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$y^2 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - y^2 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

2) arccos: $[-1,1] \to [0, \pi]$ 3) arctan: $]-\infty, \infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \arctan' y = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

Hyperbol Funktionen
- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty[$
- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to]-1,1[$

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2) $\sinh'(x) = \cosh x$
3) $\cosh'(x) = \sinh x$
4) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Die Umkehrfunktionen
- $\text{arsinh} = \sinh^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\text{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ $\forall y \in \mathbb{R}$
- $\text{arcosh} = \cosh^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\text{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ $\forall y \in]1, \infty[$
- $\text{artanh}:]-1,1[\to \mathbb{R}$
$\text{artanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}$ $\forall y \in]-1,1[$

Satz (L'Hôpital, Bernoulli)
Seien $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff. mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$
Falls $\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$ und
$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert. Folgt $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$

→ Gilt auch falls $b = \pm\infty$, $x \to b^+$
und falls $\lim f = \infty$, $\lim g = \infty$

Satz Cauchy
Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $]a,b[$ diff.
Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

Falls $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$ folgt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

4.3 Höhere Ableitungen

Zweite Ableitung $\Leftrightarrow$ Konvexität

Def – $f: I \to \mathbb{R}$
1) f ist konvex auf I falls $\forall x_0 < x_1 \in I$ und $t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

Streng konvex <

2) f ist konkav auf I falls $\forall x_0 < x_1 \in I$ $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

Streng konkav >

→ $x \mapsto ax + b$ sind konvex
→ Die Summe zweier konvexen Funktionen ist konvex

Lemma $f: I \to \mathbb{R}$
f ist konvex $\Leftrightarrow$ $\forall x$ $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Steigung der Sekante zwischen $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ — $(x, f(x))$ und $(x_1, f(x_1))$

Satz $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diff.
Die Funktion f ist (streng) konvex $\Leftrightarrow$ f' streng monoton wachsend ist

Def – Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$. Falls f in $]a,b[$ diff. ist und ihre Ableitungfunktion f' in $]a,b[$ diff ist bezeichnet f'' oder $f^{(2)}$ die Funktion $(f')'$

Korollar
Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal diff in $]a,b[$. Falls $f'' \geq 0$ ($f'' > 0$) ist, dann ist f (streng) konvex

$f'' \geq 0 \Rightarrow f$ konvex

f	konvex	konkav	↗	↘
f'	↗	↘	≥ 0	≤ 0
f''	≥ 0	≤ 0		

Def – Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff in D
1) Für $n \geq 2$ ist f n-mal diff in D, falls f in D $(n-1)$-mal diff ist
2) Die Funktion f ist n-mal stetig diff. in D falls sie n-mal diff ist und $f^{(n)}$ stetig ist.
3) Die Funktion f ist in D glatt falls sie für $\forall n \geq 1$ n-mal diff ist
→ $\sin x$, $\cos x$, $\exp(x)$, Polynome

→ eine n-mal diff Funktion ist $(n-1)$-mal stetig diff.

Satz Sei f, g n-mal diff.
1) $f + g$ ist n-mal diff. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2) $f \cdot g$ ist n-mal diff $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

→ f 2-mal diff streng konvex $\not\Rightarrow$ $f'' > 0$

4.4 Potenzreihen & Taylor approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Sei f $(n+1)$-mal diff dann gilt

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Sei f_n eine Folge von Funkt. $f_n: D \to \mathbb{R}$
$f_n \to f$ gleichmässig falls $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

f_n stetig / diff, $f_n \to f$ gleichmässig $\Big\}$ $\Rightarrow$ f stetig (aber nicht diff!)

Satz
Sei (f_n) eine Folge in $C^1(]a,b[) = \{ f \mid f \text{ diff}, f' \text{ stetig} \}$
mit $f_n \xrightarrow{Gl.} f$ und $f_n' \xrightarrow{Gl.} g$ wobei $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$

Dann gilt $f \in C^1(]a,b[)$ und $f' = g$

Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven konv. Radius $\rho > 0$

Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ auf $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ diff und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-x_0)^{k-1}$ $\forall x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$

$\Rightarrow f(x)$ $\forall x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$ ist glatt

Korollar

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere $c_j = \dfrac{f^{j}(x_0)}{j!}$

Satz

Sei $f : [a,b]$ stetig in $]a,b[$ und $n+1$ mal diff.
Für $\forall x$, $a < x < b$ $\exists \xi \in]a,x[$ mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_n(f,x,a)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(f,x,a)}$$

$\rightarrow$ $\dfrac{R_n(f,x,a)}{(x-a)^n} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(x-a)^n} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)}{(n+1)!}$

For $x \to a$ $\dfrac{R_n}{(x-a)^n} \longrightarrow 0$

Korollar – Taylor Approximation

Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig in $]c,d[$ $(n+1)$ mal diff.
Sei $c < a < d$. Für alle $x \in [c,d]$ gibt es ξ zwischen x und a s.d

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a = Entwicklungspunkt

Fehlerabschätzung für $x \in [a, \dots]$ $\xi \in (a,x)$

$$|R_n(x,a)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \dots$$

$$|R_n(f,x,a)| \leq \sup_{a<c<x} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Want to set a bound on x if $f(x)$ is not bounded

Taylor Reihen

Sei $f \in C^{\infty}$ (glatt). Die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 ist die Potenzreihe

$$T_{\infty}(x,x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

$\rightarrow$ Im Allg. nicht konv. (Need to look at ρ)
$\rightarrow$ Falls konv., konv. nicht immer gegen f.

Extrema und die Ableitung

1. Bestimme alle kritische Punkte von f in $]a,b[$ x_0
   $\rightarrow f'(x_0) = 0$ oder $f(x_0)$ nicht diff.
2. Vergleiche die Werte von f an jeder kritische Stelle + a & b
3. $f'' > 0 \Rightarrow f$ konvex
   $f'' < 0 \Rightarrow f$ konkav
   und $f'(x_0) = 0$ muss nicht ein Extrema sein

Def – Ein Sattelpunkt / horizontal Wendepunkt ist $(x_0, f(x_0))$ wo $f'(x_0) = 0$ aber kein lok. Extrema ist.

2) Ein Wendepunkt ist $(x_0, f(x_0))$ wo der Drehsinn der Tangente sich ändert.
$f''(x_0) = 0$ aber $f'(x_0) = 0$ gilt nicht notwendigerweise

Sattelpunkt	$f''(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$
Wendepunkt	$f''(x_0) = 0$	$f'(x_0) \neq 0$

Korollar

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ 2-mal stetig diff.
Sei $a < x_0 < b$. Wir nehmen an $f'(x_0) = 0$
1) Falls $f''(x_0) > 0$ ist, ist x_0 strikte lok. Minimum
2) Falls $f''(x_0) < 0$ ist, ist x_0 lok. Maximum.

Satz

Sei $n > 0$, $a < x_0 < b$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ $(n+1)$-mal stetig diff.
Wir nehmen an $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$
1) Falls n gerade ist und x_0 lok. Extrema Stelle folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
2) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so ist x_0 ein str. lok. Minimum
3) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0 ein str. lok. Maximum

5. Das Riemann Integral

Def – $F \in C^1[a,b]$ heisst **Stammfunktion** von f falls gilt
$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Def – Eine **Partition** eines Intervalls $I = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \subset I$
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ wobei $\{a,b\} \subset P$
Sei $\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \mid P \text{ ist endlich, } a,b \in P\}$
$\delta_i := x_i - x_{i-1}$ $i \geq 1$ die Länge von $I_i = [x_{i-1}, x_i]$

2) Die **Feinheit** der Zerlegung ist definiert $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$

3) Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen Punkten $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$
$\xi := \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

4) $S(f,P,\xi) = \sum(f,P,\xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

nennt man die **Riemannische Summe**

Def – Sei nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion
D.h. $\exists M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$

Untersumme – $\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (\inf_{x \in I_i} f(x))(x_i - x_{i-1})$

Obersumme – $\overline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x \in I_i} f(x))(x_i - x_{i-1})$

$\rightarrow$ $-M \leq \inf_{I_i} f \leq \sup_{I_i} f \leq M$

$-M(b-a) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq M(b-a)$

Def – Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P falls $P \subset P'$
- $P_1 \cup P_2$ ist wieder eine Partition

Lemma 1

Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion
Für zwei Partitionen $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt $P \subset Q$
$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$

Lemma 2

Für beliebige Partitionen gilt $\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$
Insbesondere $\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P)$

Def – $\underline{S}(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P)$ das untere Riemann Integral von f

$\overline{S}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P)$ das obere Riemann Integral von f

$\rightarrow$ $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

Def – Eine beschränkte Funktion ist Riemann integrierbar falls
$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$
$\rightarrow$ bezeichnet mit $\int_a^b f(x)\,dx$

Satz – Riemannische Kriterium für Integrierbarkeit

Eine beschränkte Funktion f auf $[a,b]$ ist integrierbar
$\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Folgende Aus. $\Leftrightarrow$
1) f ist integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ s.d $\forall P \in \mathcal{P}_{\delta}(I)$
$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$ $\qquad \searrow \delta(P) \leq \delta$

Korollar

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Folgende sind äquiv.
1) f ist integrierbar, $\int_a^b f(x)\,dx = A$
2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ s.d $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ mit ξ $(x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$

$$|A - S(f,P,\xi)| < \varepsilon$$
$$S(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

i.e. f integrierbar $\Leftrightarrow$ $\lim_{\delta(P) \to 0} S(f,P,\xi)$ existiert

für alle P mit $\delta(P) \to 0$ und $\lim_{\delta(P) \to 0} S(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Dann ist f integrierbar

Satz

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$
Dann sind $f \pm g$, λf, fg, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ integrierbar
Falls $|g(x)| \geq \beta > 0$ $\forall x \in [a,b]$ so ist auch f/g

Korollar

$P(x)$, $Q(x)$ Polynome auf $[a,b]$. Dann sind P, Q int.
Falls Q in $[a,b]$ keine Nullstelle hat, dann ist $P(x)/Q(x)$ int.

Satz – Gebietsadditivität

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $a < c < b$
Sei $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\rightarrow$ $\int_a^a f(x)\,dx := 0$

$\rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

Satz

Sei $[a,b]\subset\mathbb{R}$ kompakt Intervall. Sowie $f_1,f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f_1+\beta f_2$ integrierbar und

$$\int_a^b(\alpha f_1+\beta f_2)\,dx = \alpha\int_a^b f_1(x)\,dx+\beta\int_a^b f_2(x)\,dx$$

Satz

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (beschränkt) stetig. Dann ist f integrierbar

Def – $f:D\to\mathbb{R}$ ist in D gleichmässig stetig falls

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall x,y\in D\ \ |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Satz $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig

Eigenschaften des R. Integrals

Satz Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x)\le g(x)\ \ \forall x\in[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Korollar

Falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar beschränkt folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b|f(x)|\,dx$$

Satz – Cauchy-Schwarz Ungleichung

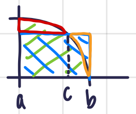
Seien f,g zwei integrierbare Funktionen

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Satz – Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gibt $c\in[a,b]$ mit

$$\underline{A}=\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)=\underline{B}$$



$$u = f(\xi)(\xi-b)-\int_\xi^b f(x)\,dx$$

$$= u = \int_a^\xi f(x)\,dx - f(\xi)(\xi-b)$$

Satz – Cauchy

Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ f stetig, g beschränkt Integrierbar mit $g(x)\ge0\ \ \forall x\in[a,b]$. Dann gibt $c\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

→ mit $g\equiv1$ erhalten wir der MWS der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Satz

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar

Def – Sei $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f falls F stetig diff. in $[a,b]$ ist und $F'=f$

Hauptsatz der Integral Rechnung

Seien $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt \qquad a\le x\le b$$

ist in $[a,b]$ stetig diff. und $F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in[a,b]$

→ Jede stetige Funktion hat mind. eine Stammfunktion

→ Falls F, G zwei Stammfunktionen sind dann $F'=f$ $G'=f$

$\Rightarrow F'-G'=f-f=0 \Rightarrow (F-G)'=0$

$\Rightarrow (F-G)(x)=c \Rightarrow F(x)=G(x)+c$

Fundamentalsatz der Analysis

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein Stammfunktion F von f, die bis auf eine Additive Konstante eindeutig bestimmt ist, und es gilt

$$\sum F'(x)\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx = F(x)+c$

Integrals table

D	f	F
$\mathbb{R}$	e^x	e^x+c
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x+c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x+c$
$\mathbb{R}$	$x^n, n\in\mathbb{N}$	$x^{n+1}/n+1\ +c$
$(0,\infty)$	x^α $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha\neq-1$	$x^{\alpha+1}/\alpha+1\ +c$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$(-1,1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin+c$
$(-1,1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos+c$
$\mathbb{R}$	$1/1+x^2$	$\arctan+c$
$\mathbb{R}$	a^x	$a^x/\ln a+c$

Integrationsmethode

Satz – Partielle Integration

Seien $a<b$ reelle Zahlen und $g,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diff. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \underbrace{f(b)g(b)-f(a)g(a)}_{(fg)|_a^b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

→ $\int f\,dg = fg - \int g\,df$ $\qquad \int\ln x\,dx = \int(\ln x\cdot 1)\,dx$

Methode der Substitution (opposite of chain rule)

Sei $a<b$, $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diff.
I ein Interval $\phi([a,b])\subset I$ und $F:I\to\mathbb{R}$ stetig
Dann, nach Kettenregel

$$((F\circ\phi)(t))' = F'(\phi(t))\cdot\phi'(t)$$

Falls F ein Stammfunktion von f $(F'=f)$
Dann $f(\phi(t))\phi'(t) = (F\circ\phi)'(t)$
D.h $F\circ\phi$ ist ein Stammfunktion von $f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) \underset{\text{fund.}}{=} (F\circ\phi)(b)-(F\circ\phi)(a)$$

$$= F(\phi(b))-F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt$$

Satz – Substitution

Sei $a<b$ $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diff. $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b])\subset I$, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig

Dann gilt: $$\int_a^b f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt$$

→ Unbestimmte $\int f(x)\,dx\Big|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t))\phi'(t)+c$

$x=\phi(t)\qquad dx=\phi'(t)\,dt$

1) Links → recht Substitution
Falls ein Integral explizit in der Form $\int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t))\phi'(t)$ liegt
$x=\phi(t)\Rightarrow x_1=\phi(t_1)\quad x_2=\phi(t_2)$

2) Recht → links Substitution
$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \Rightarrow x=\phi(t)\qquad \alpha=\phi(a)\quad\beta=\phi(b)$

Bounds 1) Change the bounds 2) leave them & resubstitute

5.5 Integration konvergenter Reihen

Satz

Sei $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge von beschränkte Integrierbare Funktionen die gleichmässig gegen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konv. Dann ist f beschränkt, Integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Korollar

Sei $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge beschränkter integrierbare Funktionen s.d $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konv.

Dann gilt: $$\sum_{n=0}^\infty\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^\infty f_n(x)\right)dx$$

$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\qquad |x|<1$

$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$

Korollar

Sei $f(x)=\sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ Potenzreihe mit $\rho>0$

Dann ist für jedes $0\le r<\rho$ gilt $\forall x\in\,]-\rho,\rho[$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^\infty\frac{c_k}{k+1}x^{k+1}$$

→ f ist auf $[-r,r]$ diff. und es gilt $\forall x\in\,]-\rho,\rho[$
$f'(x)=\sum_{k=1}^\infty k c_k x^{k-1}$

Riemann Summe & Folgen

Falls $(P^{(n)})$ eine Folge von Partitionen mit $\delta(P^n)\to0$ sei $\xi^{(n)}$. Dann $\lim_{n\to\infty} S(f,P^{(n)},\xi^{(n)}) = \int_a^b f(t)\,dt$

Stirlingsche Formel

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

5.8 Uneigentliche Integrale

1. Interval nicht kompakt
2. f unbeschränkt in $[a,b]$

Def – Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$ für alle $b>a$. Falls $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und f ist auf $[a,\infty)$ integrierbar
Sonst divergiert die Integral.

→ $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$

1) $\int_1^\infty e^{-x}\,dx=\frac1e$ $\qquad$ 2) $\int_1^\infty\frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases}\text{div falls } s\le1\\ \frac{1}{s-1}\ \text{falls } s>1\end{cases}$

Lemma – Majoranten Kriterium (To know konv. when no F)

Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$ $\forall b\in\mathbb{R}$ $b>a$

1) Falls $|f(x)|\le g(x)\ \ \forall x\ge a$ und $g(x)$ ist auf $[a,\infty)$ integrierbar, so ist f auf $[a,\infty)$ integrierbar

2) Falls $0\le g(x)\le f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert. so divergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$

1) $\int_1^\infty\frac{1}{1+x^s}\,dx = \begin{cases}\text{konv. } s>1\\ \text{div. } s\le1\end{cases}$ $\qquad \frac{1}{2x^s}\le\frac{1}{1+x^s}\le\frac{1}{x^s}\quad x\ge1$

→ Technique: split up the range $\int_0^\infty e^{-x^2} = \int_0^1 e^{-x^2}+\int_1^\infty e^{-x^2}$

Satz – Integral Test

Sei $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ monoton fallend. Dann konv. $\sum_{k=1}^\infty f(k)\Leftrightarrow\int_1^\infty f(x)\,dx$ konv.

In diesem Fall gilt $0\le\sum_{k=1}^\infty f(k)-\int_1^\infty f(x)\,dx\le f(1)$

1) Für $s>1$ $0 \le \sum \frac{1}{k^s} - \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \le 1$

$0 \le \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \le 1$

$$\boxed{\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}}$$

Def - Sei f auf $[a+\varepsilon, b]$ $\varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar. $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar falls $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ existiert. $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

→ Maj. Kriterium gilt für diese auch.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_b^c f(x)\,dx$$

→ Need to take the limits separately!

Euler Gamma Funktion

Für $s>0$ $\quad \Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad$ (konv. for $s>0$)

$\Gamma(s)$ interpoliert $n \mapsto (n-1)!$

$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n\,dx \quad$ with $f = x^n \quad g' = e^{-x}$

$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}x^n\,dx$ mit $\int_0^b e^{-x}x^n\,dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^b + \int_0^b e^{-x} n x^{n-1}\,dx$

$\Gamma(n+1) = \lim_{b\to\infty}[-e^{-b}b^n - 0] + \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x} n x^{n-1}\,dx$

$= n\Gamma(n)$

$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

1) $A(x+1) + B(x-1) = 1$

2) $A + B = 0 \qquad$ 3) $A - B = 1$

Identities

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \qquad \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$$

$(1+x)^n \ge 1+nx \quad (x>-1)$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad x\in(0,1)$$

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx} \qquad x\in(0,1)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Reihen - Kriterium

1. Definition $\sum a_n = \lim S_N$
2. $\lim a_n = 0$ Falls $\lim a_n \ne 0$, divergiert die Reihe

$\sum a_n$ konv. $\Rightarrow \lim S_N = S$ und $a_N = S_N - S_{N-1}$

$\lim a_N = \lim S_N - S_{N-1} = \lim S_N - \lim S_{N-1} = S - S = 0$ ✓

Typical limits

$\lim \frac{\sin x}{x} = 1$

Typical Reihen

$\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \qquad \sum_{n=0} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q|<1$

Techniques

Wurzeltrick $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ multiply by $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\sum a_n$ konv. $\Rightarrow \sum \frac{1}{a_n}$ div. (Kriterium 2)

Integral techniques

$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx = F(g(x))$ direct integral

$\int_{h(x)}^{g(x)} i(t)\,dt = f(x) = F(g(x)) - F(h(x))$

$\Rightarrow f'(x) = F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))\cdot h'(x)$

$= i(g(x))\cdot g'(x) - i(h(x))\cdot h'(x)$

Polynomials $P(x)/Q(x)$
- $\deg(P(x)) < \deg(Q(x)) \Rightarrow$ PBZ
- else $\Rightarrow$ division

Substitution e^x

Substitution $\ln x$

Übungen

1. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c^2 = 2$.

Beweis obere Schranke / Maximum

Sei $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ ist eine ob. S. von $A\}$

$B \neq \emptyset$ da A nach oben beschränkt ist.

$A \neq \emptyset$

Per Definition von B $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $a \leq b$ (V)

$\Rightarrow$ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

$\Rightarrow$ c ist eine obere Schranke von A

$\Rightarrow$ c ist die kleinste obere Schranke

Beispiel: $\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \dots\}$ ist nach oben unbeschränkt, $\inf A = \min A = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$(e^x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad |x|<1$$

Polarform $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $r = \|z\|$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= re^{i\theta}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$z^n = r^n e^{in\theta}$

Komplexe Gleichungen

$z^n = c$ hat n Lösungen in $\mathbb{C}$

$z_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}$

$\Rightarrow$ Roots come by pairs.

Beweise Grenzwerte

Wir müssen zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d

$\forall n \geq N$ gilt $|a_n - L| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ (umformeln)

$\Rightarrow$ $n >$ expression. ε

$\Rightarrow$ $N := \lceil$expression. $\varepsilon\rceil$

sei $\varepsilon > 0$ und $N = \dots$ so gilt $\forall n \geq N \dots$

Tricks

- if ε has power of n use binomial formula

Use the n Herleitung to: Die Bedingung $|a_n - L| < \varepsilon$ ist somit erfüllt für alle $n > \dots$ wir setzen also $N := \lceil - \rceil$ und $\forall n \geq N$ gilt somit ...

- $|+a-a|$ if needed
- $|-a_n + a| = |-(a_n - a)| = |a_n - a|$

$f(x) = x$ $P_n = \{a + ih \mid 0 \leq i \leq n\}$ $h = \frac{b-a}{n}$

$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ weil $x_{i-1} = \inf_{x \in I_i} f(x)$

$f(x) = x$ $\quad$ $f(x) \nearrow$

$= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(a + \left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right]$

$= \frac{b-a}{n}\left[na + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n}(i-1)\right]$

$= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$\overline{S}(f,P) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \frac{(b-a)^2}{2}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right) - \left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$

$= \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{1}{n}$

Für gegebene $\varepsilon > 0$ wählen wir N s.d $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^2}$

MCQ

- ✗ Falls $\lim c_n$ existiert, existiert $\lim a_n$ und $\lim b_n$
- ✓ Falls $\lim c_n$ und $\lim b_n$ existieren, existiert $\lim a_n$
- ✓ Falls (a_n) und (b_n) beschränkt ist (c_n) beschränkt
- ✗ Falls (c_n) konv, konv. mind (a_n) oder (b_n)
- ✓ Falls a_n konv. ist $a_n + a_{n+1}$ konv.
- ✗ Falls $a_{n+1} - a_n$ konv gegen 0 ist a_n konv.
- ✓ Falls $a \in \mathbb{R}$ existiert s.d $a_n \leq a \ \forall n$, $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n$
  dann a_n konv $\Rightarrow$ Weierstrass.

Known limits

$\lim n^a q^n = 0$

$\lim (1 + 1/n)^a = 1$

Techniques

Weierstrass → monotonie + beschränkt

monotonie: x_{n+1} in function of x_n

Finding limits

- Sandwich theorem
- Compare to a known sequence.

Good luck ü

In case of errors, comments, questions feel free to contact me at asjoestroem@ethz.ch

I do not guarantee the correctness of the material.