Übungsstunde 1 - Analysis I

Fragen? asjoestroem@ethz.ch (auch wenn es andere Vorlesungen betrifft!)
n.ethz.ch/~asjoestroem
Discord: anjaja5989 [Anja]

Tipps: Lösen Sie die Serien!
Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht klarkommen, markieren Sie es / schreiben Sie warum Sie nicht weiterkommen und bei der Korrektur gebe ich individuelle Tipps um weiter zu kommen.

Vorlesung / Übungsstunde

Übungstunde n → Vorbesprechung Serie n
Übungstunde n → Nachbesprechung Serie n−1

Fragen? / Etwas unklar?

Plan für Heute
- Wichtige Punkte aus der Theorie
- Durch Serie 1 gehen:
  - → Theorie Recap beim wichtige Aufgaben
  - → Ähnliche Beispiele / Beweise
  - → Tips & Kochrezepte
- Quiz

Supremum & Infimum

Def $c \in \mathbb{R}$ ist eine $\underbrace{\text{obere / untere Schranke}}_{\text{nicht eindeutig falls existiert}}$ von $A \subset \mathbb{R}$: $\forall a \in A \quad c \geq a \;/\; c \leq a$

$M \in \mathbb{R}$ maximum $\begin{cases} M \in A \\ M \text{ ist eine obere Schranke von } A \end{cases}$

$m \in \mathbb{R}$ minimum $\begin{cases} m \in A \\ m \text{ ist eine untere Schranke von } A. \end{cases}$

eindeutig falls existiert.

Supremum $\exists$ wenn A nach oben beschränkt ist
→ Minimum der Menge der oberen Schranken
→ Falls $\sup A \in A \Rightarrow A$ besitzt ein Maximum $\sup A = \max A$

Infimum $\exists$ wenn A nach unten beschränkt ist
→ Maximum der Menge der untere Schranken
→ Falls $\inf A \in A \Rightarrow A$ besitzt ein minimum, $\inf A = \min A$

Eigenschaften von sup / inf

$$\begin{cases} \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \\ \inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} \end{cases}$$

Inf / Sup (Min / Max) finden

1. Untere / obere Schranke finden
2. Hypothese für kleinste / grösste ermitteln
3. Zeigen (mittels Wiederspruch), dass es tatsächlich die kleinste / grösste ist.
4. Überprüfen ob $\in A$?

Beispiele

Vorlesung: $\mathbb{N}$ enthält 0, $\mathbb{N}^*$ nicht.

- $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

1. $b = 1$ ist eine obere Schranke da $\frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. kleinste $\Rightarrow \sup A = 1$
3. $1 = \frac{1}{1} \in A \Rightarrow \max A = 1.$

1. $c = 0$ untere Schranke
2. Hypothese $c = 0$ die grösste ist.
   i.e $\exists c' > c$ s.d. $s' \leq a \ \forall a \in A$
3. Wiederspruch beweis $\exists c' > c = 0$ s.d. $c' \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow n \leq \frac{1}{c'}$ (da $c' > 0$)

$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist beschränkt ϟ

$\Rightarrow \inf A = 0$, kein min da $0 \notin A$.

- $A = \{ n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \dots \}$

$c = 0$ ist eine untere Schranke da $\forall a \in A, a \geq 0$
$\Rightarrow \inf A = 0.$
$0 \in A \Rightarrow \min A = 0$

Nach oben unbeschränkt $\Rightarrow \sup A = \infty$
Max existiert nicht.

- $A = \{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ -2, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, \dots \}$

$\forall a \in A, a \in \{-2\} \cup (-1, 1)$

$\Rightarrow \inf A = -2$, $-2 \in A \Rightarrow \min A = -2$
$\Rightarrow \sup A = 1$, $1 \notin A$, max existiert nicht.

- $A = \left\{ \frac{1}{6+m} + \frac{1}{4+n} \mid m,n \in \mathbb{N} \right\}$

obere Schranke $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

kleinste $\sup A = \frac{5}{12}$
da $\frac{5}{12} \in A \Rightarrow \max A = \frac{5}{12}$

Schwieriger wenn im Grenzwert ist.

$\frac{1}{6+m} \to 0 \quad \frac{1}{4+n} \to 0.$

0 ist eine untere Schranke von $\frac{1}{6+m} + \frac{1}{4+n} \geq 0.$

Show: 0 ist die grösste untere Schranke.

Wiederspruchsbeweis sei $\varepsilon > 0$ eine grössere untere Schranke.

Show $\frac{1}{6+m} + \frac{1}{4+n} > \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{6\varepsilon+2} + \frac{\varepsilon}{4\varepsilon+2} = \frac{1}{6+\frac{2}{\varepsilon}} + \frac{1}{4+\frac{2}{\varepsilon}} > \frac{1}{\quad}$$

Wählen wir $m, n > \frac{2}{\varepsilon}$

$$\frac{1}{6+m} + \frac{1}{4+n} < \frac{1}{6+\frac{2}{\varepsilon}} + \frac{1}{4+\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{6\varepsilon+2} + \frac{\varepsilon}{4\varepsilon+2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \lightning$$

Kein grössere untere Schranke.

Kein min da $\frac{1}{6+m} + \frac{1}{4+n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6+m} = \frac{-1}{4+n}$$

$\Leftrightarrow -(6+m) = 4+n \Leftrightarrow -10 = m+n$ keine Lösung in $\mathbb{N}$ hat

- $A = \left\{ \frac{1}{3+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ sup, max $= \frac{1}{3}$

$0 \leq \frac{1}{3+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ also 0 ist eine unterschranke.

zeigen dass es die kleinste ist.

wiederspruchs: $\exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{3+n} \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei $n > \frac{1}{\varepsilon}$: $\frac{1}{3+n} < \frac{1}{3+\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{3\varepsilon+1} < \frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$ ↯

Gibt keine grössere untere Schranke.

$\Rightarrow$ inf $A = 0$.

0 ist aber kein min

$\frac{1}{3+n} = 0$ keine Lösung hat.

Ordnung der reellen Zahlen

Was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet ist die Ordnungsvollständigkeit.

Ordnungsaxiome

O1 Reflexivität $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

O2 Transitivität $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O3 Antisymmetrie $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O4 Total $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \vee y \leq x$

Kompatibilität

K1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K2 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, \ x \cdot y \geq 0.$

Tipps:
- für $a \leq b$ K1 benutzen mit $(-a)$ um $0 \leq b - a$ zu bekommen.
- Für $0 \leq b - a$ K2 benutzen mit $\underline{c \geq 0}$ um $0 \leq c(b-a) \Leftrightarrow 0 \leq cb - ca$ zu bekommen
  Dann nochmals K1 benutzen mit ca um $ca \leq cb$ zu bekommen.

Ordnungsvollständigkeit

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ so dass (i) $\underline{A \neq \emptyset, B \neq \emptyset}$ V(i)

(ii) $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ V(ii)

Dann $\exists c \in \mathbb{R}$ so dass $\forall a \in A, \forall b \in B, \ a \leq c \leq b$

Archimedisches Prinzip

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$

$\rightarrow$ y kann man frei wählen

$\forall \varepsilon > 0, \ y = 1, \ \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $1 < n\varepsilon \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$ hilfreich im ε Beweise

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$

<u>Bem</u>: $x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$

$\mathbb{N}$ enthält 0, $\mathbb{N}^*$ nicht

Beispiele

- $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R},\ x \leq y,\ u \leq v$

Trick: transitivität

$x \leq y \Rightarrow x + u \leq y + u$ K1
$x + u \leq u + y$ A4 (1)

$u \leq v \Rightarrow u + y \leq v + y$ K1
$u + y \leq y + v$ A4 (2)

$(1), (2) \Rightarrow x + u \leq y + v$ O3

- $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R},\ x < y,\ u < v$

$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$

$x \leq y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x + u \leq u + y$, und da $x \neq y \Rightarrow x + u \neq u + y$

$u < v \Leftrightarrow u \leq v \wedge u \neq v$
so $u \leq v \Rightarrow .. \Rightarrow u + y \leq v + y$ und da $u \neq v \Rightarrow u + y \neq v + y$

Transitivität: $x + u \leq y + v$ und $x + u \neq u + y \neq v + y$

$\Rightarrow x + u < y + v$

- $y \geq 0 \Rightarrow y + (-y) \geq 0 + (-y)$ K1
$\Leftrightarrow 0 \geq -y$

- Fall 1: $y \geq 0 \Rightarrow y \cdot y \geq 0$ K2
$\Rightarrow y^2 \geq 0$

Fall 2: $y \leq 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} -y \geq 0$
$\Rightarrow (-y)(-y) \geq 0$ K1
$\Leftrightarrow y^2 \geq 0$

Fragen vom Quiz

①

Sei $A \subset B$, wobei A ein maximum besitzt. Dann besitzt auch B ein maximum.?

→ Falsch. Gegenbeispiel: $B = [1, 10)$, $A = \{3\}$

② Falls eine nicht leere Menge nach oben beschränkt ist, besitzt die Menge der obere Schranken ein minimum?

→ Wahr, und diese minimum ist der supremum der Menge.

③ Sei A eine nicht leere, nach unten beschränkte Menge. Sei b ihr infimum und minimum.

✓ $b \in A$ (Def. von minimum)
✓ b ist der sup. der unteren Schranken
✓ b ist der max der unteren Schranken.

④ $z = \cos\theta + i\sin\theta$

✓ $\bar{z} = \frac{1}{z}$, im allgemein gilt $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$

✓ z ist normiert, $\|z\| = \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}} = \sqrt{1} = 1$

⑤ Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ wobei $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Dann $\exists c \in \mathbb{R}$ wobei $\forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leq c \leq b$

→ Falsch. $A, B \neq \emptyset$ fehlt. (Ordnungsvollständigkeit)

⑥ Für $r_1, r_2, \varphi, \phi \in \mathbb{R}$. Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$, $z_2 = r_2 e^{i\phi}$ und $|z_1| = |z_2|$

✓ $|r_1 e^{i\varphi}| = r_1$ // r_1 ist definiert als $r_1 = \|z_1\| = \|r_1 e^{i\varphi}\|$

✓ $r_1 = r_2$; da $|z_1| = |z_2|$

✗ $\varphi = \phi$

✗ $|e^{i\phi}| \neq |e^{i\varphi}|$ Für $\phi \in \mathbb{R}$ gilt es immer, dass $|e^{i\phi}| = 1$

⑦ $\frac{1}{z}$ im $\underbrace{\text{kartesisches Form}}$ für $z = 2+i$

kann nicht i im Nenner enthalten

Trick: mit $\bar{z}$ multiplizieren

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

⑧ $i^{365} = i$

$$\left.\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{zyklisch}$$

$i^5 = i$

$365 \bmod 4 = 1$

$\Rightarrow i^{365} = i^1 = i$