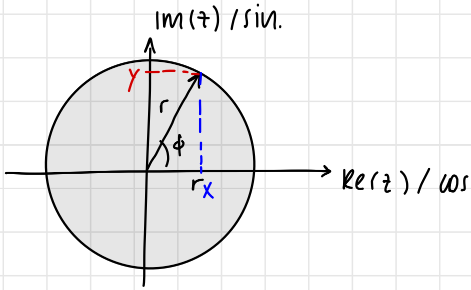
Analysis I - Übungsstunde 2

Plan für Heute
- → Korrektur Serie 1 (Aufgabe 1.2)
- → Theorie Folgen
- → Beispiele Folgen
- → Tipps Serie 2
- → Quiz

Recap - Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ wobei wir definieren die Multiplikation.



Kartesische Form: $x+iy =: z$ $\quad Re(z) = x$

$Im(z) = y$

Konjugiertes $\bar{z} = x - iy$

$Re(\bar{z}) = Re(z)$

$Im(\bar{z}) = -Im(z)$

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & (1) \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 & (2) \end{cases}$$

Norm: $\|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$x+iy = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

$r = \|z\| = x^2 + y^2.$

$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\bar{z}\cdot z = x^2 + ixy - ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \bar{z}z = \|z\|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$$

Falls z löst eine Gleichung, löst $\bar{z}$ auch.

z.B $\quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5} = \bar{0}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \bar{a}_0 + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_3 z^3} + \overline{a_4 z^4} + \overline{a_5 z^5} = \bar{0}$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_2 \bar{z}^2 + \dots + \bar{a}_5 \bar{z}^5 = \bar{0}$

$\underset{Re(\bar{z}) = Re(z)}{\Leftrightarrow} a_0 + a_1 \bar{z} + \dots a_5 \bar{z}^5 = 0 \quad \rightarrow \bar{z}$ löst auch die Gleichung

Theorie - Woche 2

Definition - Folge $(a_n)_{n\geq 1}$: $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wobei $a_n \equiv a(n)$

Explizit definiert: $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$

Rekursiv definiert: e.g. Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Wichtige Folgen: $\frac{1}{n}$, $(-1)^n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^a = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

Lemma 2.1.3 Es gibt höchstens ein $\ell \in \mathbb{R}$ wobei $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)\}$ endlich ist

Definition - Konvergenz: $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent falls $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)\}$ endlich ist.

↑ Indices

→ Falls ℓ existiert ist sie eindeutig bestimmt. $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$

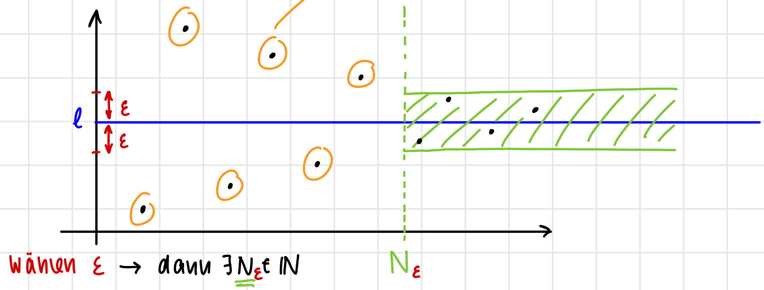
Konvergenz & Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt

Jede beschränkte Folge ist aber nicht unbedingt konvergent. Beispiel $(-1)^n$

Schema - ε - def. von Konvergenz

nur endlich viele die nicht im ε-bereich sind



Epsilon Definition von Konvergenz

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

ε - Beweise

1. N_ε finden (wie eine Funktion) $\rightarrow$ rückwärts arbeiten und $|a_n - \ell| < \varepsilon$ nach n lösen
   nach Konstruktion

2. Wir wissen jetzt wie wir N_ε wählen. Beweis "vorwärts" führen.

Beispiele

- $a_n = \frac{1}{n}$: zu zeigen $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n > N_\varepsilon \; |a_n - \ell| < \varepsilon$

  für ε beliebig klein

  wir können ein N_ε finden, die abhängig vom Wahl von ε ist.

wie ein Spiel: du gibst mir ein $\varepsilon > 0$, ich gebe dir ein $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ s.d $|a_n - \ell| < \varepsilon \; \forall n > N_\varepsilon$

1. Die Funktion $N(\varepsilon)$ finden.

$$|a_n - \ell| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \underset{\text{da } \frac{1}{n} > 0}{=} \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

N muss aber $\in \mathbb{N}$ sein, also wählen wir $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon}$

2. Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

Dann $\forall n > N$ gilt $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$ $\square$

- $a_n := \frac{n}{n+1}$ Behauptung: $l = 1$.

zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n > N$ $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

1. $N(\varepsilon)$ finden

Wir wissen dass $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

erfüllt sein muss

$\rightarrow$ nach n lösen: $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$

Da $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wählen wir $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$

2. Beweis: sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$\forall n > N$ gilt $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1 + 1} = \varepsilon$ $\square$

Alternativ (Beweis mittels Archimedisches Prinzip)

Prinzip $\forall \varepsilon > 0, y \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $y < N\varepsilon$

sei $y = 1 - \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < N\varepsilon \Rightarrow 1 < N\varepsilon + \varepsilon$

$\Rightarrow 1 < (N+1)\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{N+1} < \varepsilon$

$\forall n > N$ $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$ $\square$

- $a_n = \dfrac{3n^2+4}{2n^2+1}$ $\lim = \dfrac{3}{2}$

zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n > N$ $\left| \dfrac{3n^2+4}{2n^2+1} - \dfrac{3}{2} \right| < \varepsilon$

1. $N(\varepsilon)$ finden

$$\left| \frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6n^2+8-6n^2-3}{2(2n^2+1)} \right| = \frac{5}{4n^2+2} < \varepsilon$$

Nach n lösen: $\dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2} < n^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}} < n$

Da $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wählen wir $N_\varepsilon := \left\lceil \sqrt{\dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}} \right\rceil$

2. Beweis. sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $N := \left\lceil \sqrt{\dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}} \right\rceil$

$$\forall n > N \quad \left| a_n - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{4n^2+2} < \frac{5}{4N^2+2} = \frac{5}{4\left\lceil\sqrt{\left(\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)}\right\rceil^2 + 2} < \frac{5}{4\left(\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) + 2}$$

$$= \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon} - 2 + 2} = \varepsilon$$

Divergent Eine Folge divergiert falls sie konvergiert nicht.

$\forall K > 0, \exists N_K \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n > N_K : |a_n| > K$

$$\begin{cases} a_n > K & \rightarrow \lim a_n = \infty \\ a_n < K & \rightarrow \lim a_n = -\infty \end{cases}$$

- $a_n = 2^n$ Behauptung : $\lim 2^n = +\infty$

1. N_K finden $2^n > K \Rightarrow n > \log_2 K$

   $N_K := \lceil \log_2 K \rceil \geq \log_2 K$

2. Beweis : sei $K > 0$ beliebig, sei $N_K := \lceil \log_2 K \rceil$

   $\forall n > N_K \quad 2^n > 2^{N_K} = 2^{\lceil \log_2 K \rceil} \geq 2^{\log_2 K} = K \quad \square$

- $a_n = \ln(n)$

1. N_K finden $\ln(n) > K \Rightarrow$ nach n lösen $n > e^K$

   $N_K := \lceil e^K \rceil$

2. sei $K > 0$ beliebig, sei $N_K = \lceil e^K \rceil$

   $\forall n > N_K \quad \ln(n) > \ln(N_K) = \ln(\lceil e^K \rceil) \geq \ln(e^K) = K \quad \square$

Rechnen mit Grenzwerten

$(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent gegen a, b

1) $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergent gegen $a + b$
2) $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$
3) Falls $b_n \neq 0 \ \forall n$, $b \neq 0$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$
4) Falls $\exists K \geq 1$ mit $a_n \leq b_n \ \forall n \geq K$ dann folgt $a \leq b$

<u>Bem</u>: Kann $\Leftarrow$ verwenden, muss aber sicher sein, dass $\lim a_n$, $\lim b_n$ existieren.

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = 1$, Erst $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$ untersuchen und da $\overset{\to 1}{1}$ und $\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}$ konv. sind ist $\overset{\to 1+0}{1+\frac{1}{n}}$ auch konv.

Definition

- $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend falls $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend falls $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_{n+1} \leq a_n$

Satz von Weierstrass

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen $\sup\{a_n \mid n \geq 1\}$
- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen $\inf\{a_n \mid n \geq 1\}$

- **Beispiel 2.2.3** $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q < 1$. Zeigen $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0$

Wir verwenden den Satz von Weierstrass und zeigen 1) $x_n := n^a q^n$ monoton fallend ist
2) Nach unten beschränkt ist.

Sei $q > 0$, $x_n := n^a q^n$ (im Fall $q = 0$ haben wir $\lim_{n\to\infty} n^a 0^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$)

1) Z.z $x_{n+1} \geqslant x_n$: $x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} = (n+1)^a \frac{n^a}{n^a} q \cdot q^n$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^a}_{=1+\frac{1}{n}} q \cdot \underbrace{n^a q^n}_{x_n}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a q}_{\text{z.z} < 1} \cdot x_n$$

$$\text{Z.z} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^a q < 1$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q}$$

Wir wissen, dass $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1$ und da $0 < q < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$.

$\exists n_0$ s.d $\forall n \geqslant n_0$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q}$

$\Rightarrow \forall n \geqslant n_0$ $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a q \cdot x_n < \frac{1}{q} \cdot q\, x_n = x_n$

$\Rightarrow$ Monoton fallend $\forall n \geqslant n_0$

2) $\forall n \geqslant 1$, $x_n = n^a q^n > 0$ $\Rightarrow x_n$ nach unten beschränkt durch 0.

$\Rightarrow x_n$ konvergent (Weierstrass) gegen ℓ

$$\lim x_n = \underbrace{\lim x_{n+1}}_{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a q\, x_n} = \ell$$

und da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a$ und $\lim x_n$ und $\lim q$ existieren.

Satz 2.1.8 $\Rightarrow$ $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot \lim q \cdot \lim x_n$

$$= 1 \cdot q \cdot \ell$$

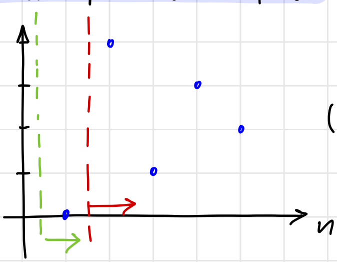
$\Rightarrow$ $q \cdot \ell = \ell$

$\Rightarrow$ $(q-1)\ell = 0 \Rightarrow \ell = 0$ da $q-1 \neq 0$ (bc. $q<1$)

Lemma 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1$

Limes superior und inferior



$(a_n)_{n\geq 1} = (4,3,4,2,4,1)$ beschränkt

≥ 1

$(b_n)_{n\geq 1} := \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ kann nur grösser werden im Fall wo wir den Inf. wegnehmen.

Wir definieren

$b_1 = \inf\{a_k \mid k \geq 1\} = 0$

$b_2 = \inf\{a_k \mid k \geq 2\} = 1$ $\Rightarrow$ $(b_n)_{n\geq 1}$ monoton steigend.

$(c_n)_{n\geq 1} := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ $\Rightarrow$ monoton fallend

Formaler gesagt: $b_{n+1} = \inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \geq \inf\{a_k \mid k \geq n\} = b_n$

$\Rightarrow b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n \geq 1$

zudem sind (b_n) und (c_n) beschränkt

Weierstraß
$\Rightarrow$ (b_n) und (c_n) konvergieren

$$\left.\begin{array}{l} \text{Limes Inferior}: \liminf a_n := \lim b_n \\ \text{Limes Superior}: \limsup a_n := \lim c_n \end{array}\right\} \text{existiert auch wenn } a_n \text{ nicht konv.}$$

Grenzwerte Berechnen

- Grösste Potenz von n factorizieren.

- Beim $\sqrt{\ }$, mit Konjugierten multiplizieren + dividieren
- Für rekursive Definitionen (wie im Beispiel 2.2.3) falls a_n konv. gegen a gilt

$\lim a_n = a$ und $\lim a_{n+k} = a$

→ Hilft auch im Serie 2 Aufgabe 4

Sandwich Lemma

Seien $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n$ wobei a_n, c_n konvergent sind mit $\lim a_n = \lim c_n = L$ dann ist b_n auch konvergent und $\lim a_n = L$

- $\lim \frac{2n}{2^n} = 0.$

$$\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0} \leq \frac{2n}{2^n} \qquad \text{For } n \geq 4 \quad 2^n \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{2n}{2^n} \leq \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{2n}{2^n} \leq \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n} = 0$$