Übungsstunde 3 - Analysis I

1. Aufgabe 2.3 / 2.4
2. Theorie Woche 3
3. Recap - alles über Folgen
4. Tipps zum Serie 3
5. Quiz

Aufgabe 2.3

- Factorisieren durch n^a
- Wurzel - Trick
- Sandwich Lemma.

b) $$\sqrt{n^2+3n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+3n} - n)(\sqrt{n^2+3n} + n)}{(\sqrt{n^2+3n} + n)}$$

$$= \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2+3n} + n}$$

$$= \frac{3n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}} + n}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}} + 1} = \frac{3}{2}$$

(d) $$\left(\frac{n}{n^2} + \frac{n+1}{n^2} + \dots + \frac{3n}{n^2}\right)$$

$$\sum_{i=n}^{3n} i = \sum_{i=1}^{3n} i - \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$= \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 3n - n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{8n^2 + 4n}{2} = 4n^2 + 2n$$

$$d_n = \frac{4n^2 + 2n}{n^2}$$

$$\lim d_n = \lim \frac{4n^2+2n}{n^2}$$

$$= \lim \frac{4+\overbrace{\tfrac{2}{n}}^{\to 0}}{1}$$

$$= 4$$

(e) Betrachten e_n^n (da die n-te Wurzel monoton ist.)

$$5^n + 11^n + 17^n$$

$$17^n < 5^n + 11^n + 17^n < 3 \cdot 17^n$$

monoton von $\sqrt[n]{\ }$

$$\Rightarrow 17 < \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n} < \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\xrightarrow{(2.2)}\ 1} \cdot 17$$

$$\lim 17 = 17$$

$$\lim \sqrt[n]{3} \cdot 17 = \lim \sqrt[n]{3} \cdot \lim 17$$

$$= 1 \cdot 17 = 17$$

$\Rightarrow \lim e_n = 17$ (Sandwich Lemma)

Aufgabe 2.2

Fall $a \geq 1$: Def. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$

$$\overset{a \geq 1}{\Leftrightarrow} \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow a < (\varepsilon + 1)^n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{a} < \frac{1}{(\varepsilon+1)^n}}_{\text{z.z.}}$$

$0 \leq q < 1$

$a = 0$, $q = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$ ✓ da $\varepsilon > 0$

$\lim n^a q^n = 0$

B.2.2.3.

$\lim \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} = 0$ d.h $\forall \varepsilon' > 0 \; \exists N' \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n > N'$ $\left| \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} - 0 \right| < \varepsilon'$

Wählen wir $\varepsilon' = \frac{1}{a} \Rightarrow \exists N$ s.d $\forall n > N'$ $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{1}{a}$

Fall $0 < a < 1$: $c = \frac{1}{a}$, $c > 1$

Wir wissen, dass $\sqrt[n]{a}$ konv für $a \geq 1$

$$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \overset{\text{Satz 2.1.8 (i)}}{=} \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{c}} = \frac{1}{1} = 1$$

Aufgabe 2.4

(i) $(x_n)_{n\geq 1}$ konv. gegen $g \Rightarrow (x_{n+1})_{n\geq 1}$ auch

$\Rightarrow \lim x_n = g \wedge \lim x_{n+1} = g$

$$\Rightarrow g = \lim x_{n+1} = \lim 1 + \frac{1}{x_n} = \lim 1 + \lim \frac{1}{x_n}$$

$$= \lim 1 + \frac{\lim 1}{\lim x_n}$$

$$= 1 + \frac{1}{g}$$

$$\Rightarrow g = 1 + \frac{1}{g}$$

$$\Rightarrow g^2 - g - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$$

$$g_{\pm} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da $x_1 = 1$, ist $x_n \geq 1 \Rightarrow g = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ii) $|x_{n+1} - g| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right|$

$$= \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{g}\right|$$

$$= \left|\frac{g - x_n}{x_n g}\right| \qquad x_n g \geq 0 \text{ also } |x_n g| = x_n g$$

$$= \frac{|x_n - g|}{x_n \cdot g}$$

$$= \frac{1}{x_n} g^{-1} |x_n - g|$$

$$(x_n \geq 1) \leq g^{-1} |x_n - g|$$

$$|x_{n+1} - g| \leq g^{-1} |x_n - g| \quad \forall n \geq 1$$

$$\leq g^{-1} (g^{-1} |x_{n-1} - g|)$$

$$\dots$$

$$\leq g^{-n} |x_1 - g|$$

Da $g^{-1} < 1$ convergiert $g^n \to 0$

$\Rightarrow \lim |x_n - g| = 0$

$\Rightarrow \lim x_n = g$

Liminf und Limsup

$(a_n)_{n\geq 1} = (4,3,4,2,4,1)$ beschränkt

≥ 1

wir definieren $(b_n)_{n\geq 1} := \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ kann nur grösser werden im Fall wo wir den Inf. wegnehmen.

$b_1 = \inf\{a_k \mid k \geq 1\} = 0$

$b_2 = \inf\{a_k \mid k \geq 2\} = 1$ $\Rightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ monoton steigend.

$(c_n)_{n\geq 1} := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ $\Rightarrow$ monoton fallend

Formaler gesagt: $b_{n+1} = \inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \geq \inf\{a_k \mid k \geq n\} = b_n$

$\Rightarrow b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n \geq 1$

Zudem sind (b_n) und (c_n) beschränkt

$\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow}$ (b_n) und (c_n) konvergieren

Limes Inferior : $\liminf a_n := \lim \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \lim b_n$

Limes Superior : $\limsup a_n := \lim \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \lim c_n$

existiert auch wenn a_n nicht konv.

Zudem, wenn (a_n) nicht beschränkt ist definieren wir

$\liminf a_n = \infty$ $\Leftrightarrow$ div. gegen ∞

$\limsup a_n = -\infty$ $\Leftrightarrow$ div. gegen $-\infty$

- $\liminf \leq \limsup$

• Beispiel

$$\limsup \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cos(n\pi) \left\langle \begin{array}{l} \cos(1\pi),\ \cos(3\pi) = -1 \\ \cos(2\pi),\ \cos(4\pi) = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{-2,\ 1+\frac{1}{4},\ -1-\frac{1}{9},\ 1+\frac{1}{16},\ -1-\frac{1}{25},\ 1+\frac{1}{36},\dots\right\}$$

$b_n = \{a_k \mid k \geq n\}$

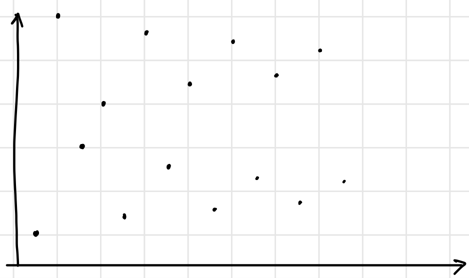
$b_1 = 1+\frac{1}{4}$, $b_2 = 1+\frac{1}{4}$

$b_3 = 1+\frac{1}{16}$, $b_4 = 1+\frac{1}{16}$

$$\underset{m\in\mathbb{N}^*}{b_n} = \begin{cases} 1+\frac{1}{(2m)^2} & n = 2m \\ 1+\frac{1}{(2m)^2} & n = 2m-1 \end{cases}$$

$$\limsup\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cos(n\pi) = \lim b_n = \lim 1 + \lim \frac{1}{(2m)^2} = \underline{\underline{1}}$$

Falls $(a_n)_{n\geq1}$ beschränkt. $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n > N$: $a_n \in (\liminf - \varepsilon, \limsup + \varepsilon)$



Lemma 2.4.1

$$(a_n)_{n\geq1} \text{ konv} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a_n)_{n\geq1} \text{ beschränkt} \\ \liminf = \limsup \end{cases}$$

Satz 2.4.2 - Cauchy Kriterium

(a_n) konv. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}^*$ s.d. $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > \mathbb{N}$

a_n ist eine Cauchy Folge.

- (a_n) konv. gegen ℓ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}^* \; |a_n - \ell| < \varepsilon. \; \forall n > N$

sei $n, m > N$ $\quad |a_m - a_n| = |a_m - \ell + \ell - a_n|$

$$\leq |a_m - \ell| + |\ell - a_n|$$

$$= |a_m - \ell| - |a_n - \ell|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad ✓$$

Satz von Bolzano - Weierstrass

Folgerung von Ordnungsvollständigkeit

Abgeschlossene Intervalle

$[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,\infty)$

Länge ein Intervalls

$\mathcal{L}([a,b]) = b-a$, $\mathcal{L}(I) = \infty$ sonst

Abgeschlossene Intervall $\begin{cases} \text{ist eine beschränkte Teilmenge von } \mathbb{R} \text{ falls } \mathcal{L}(I) < \infty \\ \Leftrightarrow \forall a_n \text{ konv. mit } a_n \in I \ \forall n \text{ dann } \lim a_n \in I. \end{cases}$

Monoton fallende Folgen von abgeschlossene Intervalle

Monoton fallende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$X_1 \supset X_2 \supset .. \supset X_n \supset \dots$$

- $X_n = (0, \frac{1}{n}] \Rightarrow \bigcap X_n = \emptyset$
- $X_n = [n, \infty) \Rightarrow \bigcap X_n = \emptyset$

Satz 2.5.5 - Cauchy Cantor

Sei $(I_n)_{n \geq 1}$ eine Folge abgeschlossene Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < \infty$

$\Rightarrow \bigcap I_n \neq \emptyset$

Und falls $\lim \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthält $\bigcap I_n$ nur ein Punkt

Bolzano - Weierstrass

Def - Teilfolge: Eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei

$$b_n = a_{\ell(n)}$$

und $\ell : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ ist eine Abbildung mit der Eigenschaft $\ell(n) < \ell(n+1)$ $\forall n \geq 1$

can only skip elements

z.B : $\ell : n \mapsto 2n$ Sei $a_n = (-1)^n$

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1^n$$

Satz 2.5.9 - Bolzano - Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

→ Sei (a_n) beschränkt ⇒ Jede konv. Teilfolge (b_n) gilt $\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n$

Def - Häufungspunkt c ist eine Häufungspunkt von (a_n) wenn (a_n) eine Teilfolge besitzt die gegen c konv.

(Analog mit $\pm\infty$)

- $(-1)^n$ hat $c = -1, 1$ als Häufungspunkte

→ liminf ist die kleinste Häufungspunkt.
  limsup ist die grösste Häufungspunkt.

→ a_n konv. gegen ℓ ⇔ ℓ ist die einzige Häufungspunkt.

Folgen in $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}$

Def – Euklidische Norm: $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^d$

$$\|(x_1, .., x_d)\| = \sqrt{x_1^2 + .. + x_d^2}$$

Def - konvergent (a_n) in $\mathbb{R}^d$ heisst konvergent falls $\exists\, a \in \mathbb{R}^d$ mit.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^* \ \forall n > N \ \|a_n - a\| < \varepsilon$$

$$\lim a_n = b \iff \lim a_{n,j} = b_j \ , \ j = 1, ..., d.$$

$\iff$ alle konv
$\iff$ alle Cauchy
$\iff$ alle beschränkt.

Komplexe Folgen

(z_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert falls $Re(z_n)$, und $Im(z_n)$ konv.

- $\lim z_n = \lim Re(z_n) + i \cdot \lim Im(z_n)$

- $$\frac{n+3-ni}{n-i} = \frac{(n+3-ni)(n+i)}{n^2+1} = \frac{n^2+3n-n^2i+ni+3i+n}{n^2+1}$$

$$= \frac{n^2+4n}{n^2+1} + i \cdot \frac{n-n^2+3}{n^2+1} \to 1-i.$$

$$\frac{n^2+4n}{n^2+1} \to \frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1 \qquad \frac{n-n^2+3}{n^2+1} \to -1.$$

Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.

Dann ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ eine Reihe

und $(S_n)_{n\geq 1}$ die Folge von Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

[$\sum_{k\geq 1} a_k$ ist konvergent wenn $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert]

Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$

Geometrische Reihe, $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$

$$\sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$$

E.g. $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Harmonische Reihe

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergiert

Tipps - Serie 3

3.2) $Re(z)$ und $Im(z)$ berechnen, konvergenz separat untersuchen

3.3) $|z_m - z_n| = |z_m - z_{n+1} + z_m - z_n| \leq |z_m - z_{n+1}| + |z_{n+1} - z_n|$

$$\cdots$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \dots$$

$$\overset{!}{<} \varepsilon$$

Epsilon Beweis dann führen

3.4) Kochrezept - liminf, limsup

1. Terme von x_n schreiben (oder von $\frac{x_{n+1}}{x_n}$)
2. b_n und c_n schreiben
3. Formel für b_n, c_n finden
4. $\lim b_n$ / $\lim c_n$ beweisen

3.5 / 3.6)

Beschränkt $\exists R$ s.d $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n \leq R$

liminf x_n $:= \lim\limits_{n \to \infty} (\inf\{x_n | x_n \geq k\})$

Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n > N: x_n \in (\liminf - \varepsilon, \limsup + \varepsilon)$

Häufungspunkt c < liminf $\Rightarrow \exists \ell : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ s.d $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}^*$ s.d $\forall n > N$

$$\underbrace{|x_{\ell(n)} - c| < \varepsilon \text{ wobei } c < \liminf.}_{}$$

ε - def. von konvergenz auf eine Teilfolge.

x_n konv. gegen c $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}^*$ s.d $\forall n > N$ $|x_n - c| < \varepsilon$