Analysis I - Übungsstunde 4

Aufgabe 3.1

$$\lim \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n > N \quad \left| \left(\frac{1}{1+i}\right)^n - \ell \right| < \varepsilon$

$$\ell = 0$$

$$\Rightarrow \left| \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1+i} \right|^n < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \varepsilon$$

$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \lim q^n = 0 \quad 0 < q < 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon' > 0 \ \exists N' \in \mathbb{N}^*$ s.d. $\forall n > N' \ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \varepsilon' \quad \boxtimes$

Aufgabe 3.3

Wir wissen, dass $|z_{n+1} - z_n| \leq \frac{1}{2^n}$ (*)

zeigen, dass z_n eine Cauchy Folge ist.

D.h: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall m, n > N, \ |z_m - z_n| < \varepsilon$

Summentrick (*)

$$\sum_{i=j}^{k} i = \sum_{i=0}^{k-j} i + j$$

$|z_m - z_n| = |z_m - z_{n+1} + z_{n+1} - z_n|$

Dreiecksungleichung

$$\leq |z_m - z_{n+1}| + \overbrace{|z_{n+1} - z_n|}^{(*)}$$

$$\leq |z_m - z_{n+1}| + \frac{1}{2^n}$$

$$= |z_m - z_{n+2} + z_{n+2} - z_{n+1}| + \frac{1}{2^n}$$

$$\leq |z_m - z_{n+2}| + \overbrace{|z_{n+2} - z_{n+1}|}^{(*)} + \frac{1}{2^n}$$

$$\leq |z_m - z_{n+2}| + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}$$

$$\overset{(\dots)}{\leq} \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^i} \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{m-1-n} \frac{1}{2^{i+n}} = \sum_{i=0}^{m-1-n} \frac{1}{2^i 2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\Rightarrow |z_m - z_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ und $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0$ also $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall m, n > N \ |z_m - z_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$

Reihen Recap

$\sum a_n$ konv falls S_N konvergiert.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$

Kriterium für den Grenzwert genau zu bestimmen

PBZ:

$$\frac{a}{bc} = \frac{A}{b} + \frac{B}{c}$$

$\Rightarrow AC + Bb = a$

- Beispiel: Mengoli Reihe $\frac{1}{n(n+1)}$

PBZ $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$$\begin{cases} A(n+1) + Bn = 1 \\ A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\underbrace{1}_{1} - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$\lim S_N = \lim \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert gegen. 1.

1. PBZ machen

→ Tip: 2. $S_1, S_2, \dots S_3$ aufschreiben (um Teleskop Elemente zu finden)

3. S_N Formel finden ⇒ $\lim S_N$ berechnen

Nullfolge Kriterium

$\sum a_n$ konv. $\Rightarrow \lim a_n = 0$

$\not\Leftarrow$ Gegenbeispiel $a_n = \frac{1}{n}$

Nützlich um divergent zu beweisen.

$\Rightarrow$ Falls $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert

<u>Beweis:</u> $\sum a_n$ konv $\Rightarrow S_n$ konv. $\Rightarrow \lim S_n = c$

$\Rightarrow$ z.z $\lim a_n = 0$ aber $a_n = S_n - S_{n-1}$. Satz 2.1.8

$\Rightarrow \lim a_n$

$= \lim S_n - S_{n-1}$

$= c - c$

$= 0$

Also falls $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.

◦ Bsp: $\sum a_n$ konv $\Rightarrow \sum \frac{1}{a_n}$ div

Sei $\sum a_n$ konv $\Rightarrow \lim a_n = 0$

$\Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = \infty \neq 0$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{a_n}$ div.

Cauchy Kriterium für Reihe

$\sum a_k$ ist konv. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}^*$ mit $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n > N$

$\sum_{k=n}^{m} a_k = S_m - S_{n-1}$ } cauchy Kriterium für Folgen

Reihen mit Nichtnegativen glieder

Sei $\sum a_n$ mit $a_n \geq 0 \Rightarrow S_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \underbrace{a_{N+1}}_{\geq 0} \geq \sum_{n=1}^{N} a_n = S_N$

$\Rightarrow S_N$ ist monoton wachsend $\Rightarrow$ nach Weierstrass, falls S_N auch nach oben beschränkt ist ist S_N konv $\Leftrightarrow \sum a_n$ konv.

S_N monoton wachsend $\Leftrightarrow \sum a_n$ konv

Vergleichsatz

$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq n_0$

$\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv. $\;/\; \sum a_k$ div $\Rightarrow \sum b_k$ div.

- Beispiel: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ ist konvergent $\left\{ \begin{array}{l} \text{PBZ} \\ \text{Teleskop Reihe} \end{array} \right.$

Wichtige Reihen im Vergleichsatz

$\left. \begin{array}{ll} \sum q^n \text{ konv} & |q| < 1 \\ \sum \frac{1}{n^s} \text{ konv} & s > 1 \end{array} \right\}$ konv. oder div $\left\{ \sum \frac{1}{n} \right.$

- $\sum \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$ $\quad n^4+n+1 \geq n^4 \Rightarrow \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} \leq \frac{3n^2+1}{n^4} = \overbrace{\frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}^{\text{konv.}: \zeta(s)}$

- $\sum \frac{\log(n)}{n}$ $\quad \frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ für $n \geq 3$. und $\sum \frac{1}{n}$ divergiert o $\sum \frac{2^n+1}{3^n+1}$

$3^n+1 \geq 3^n \Rightarrow \frac{2^n+1}{3^n+1} \leq \frac{2^n+1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\Rightarrow \underbrace{\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{Geometrische Reihe}}$ konvergiert

Zeta Funktion

$s > 1, \ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Absolut konvergenz

$\sum a_k$ abs konv $\Leftrightarrow \sum |a_k|$ konv.

Satz 2.7.10

$$\sum a_k \text{ abs konv.} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_k \text{ konv.} \\ \left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k| \end{cases}$$

Satz von Leibniz

a_n monoton fallend, $a_n \geq 0$, $\lim a_n = 0$

$\Rightarrow \sum (-1)^{k+1} a_k$ konv. $= S$

$\Rightarrow a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

In o/w, if you can write your Reihe as S w/ the conditions $\begin{cases} a_n \geq 0 \\ \lim a_n = 0 \\ a_n \text{ monoton fallend} \end{cases}$
then $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

- $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (Alternierende Harmonische Reihe)

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k}$, monoton fallend ✓, $a_n \geq 0$ ✓, $\lim \frac{1}{n} = 0$ ✓

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq S \leq 1$

Umordnung

$\sum a_n'$ ist Umordnung von $\sum a_n$ falls $\exists \varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijektion s.d $a_n' = \varphi(n)$

Riemann

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \varphi$ s.d. die Umordnung der Alternierende Harmonische Reihe gegen A konv.

Satz von Dirichlet

Falls $\sum a_n$ abs konv. dann konv. jede Umordnung und hat selben Wert.

Quotientkriterium

(a_n), mit $a_n \neq 0$

$$\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann $\sum a_n$ konv absolut.

$$\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

divergiert

Wurzelkriterium

1) Falls $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, konv. abs.

2) Falls $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, div. $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$

Exponentialfunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{sei } z \neq 0 \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z^{n+1} \cdot n!|}{|z^n \cdot (n+1)!|} = \frac{|z|}{n+1} \Rightarrow \lim \frac{|z|}{n+1} = 0$$

$z \in \mathbb{C}$

(never remove $|..|$ when in $\mathbb{C}$!)

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ konv abs } \forall |z| < \rho, \text{ div } \forall |z| > \rho$$

Konvergenzradius

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup \sqrt[k]{|c_k|} > 0. \end{cases}$$

Konvergenz von Reihen

Gegeben $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ → ist $\sum a_n$ eine spezielle Reihe?

Ja → (*)

1. Geometrische Reihe $\sum q^n \quad |q| < 1$
2. Zeta Funktion $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} \quad s > 1$
3. Teleskop Reihe
   - PBZ, S_N finden
   - $\lim S_N$
4. Alternierende Reihe
   - $\sum (-1)^{n+1} a_n$
   - a_n monoton
   - $\lim a_n = 0$.

Nein ↓

Divergente Reihe ausschliessen

$\lim a_n = 0$? — Nein → **Divergent!**

Ja ↓

Quotient Kriterium — Ja →

Nein ↓

Wurzel Kriterium — Ja →

Nein ↓

$\lim \frac{a_n}{b_n}$ betrachten.

Divergente Minoranten — Ja → **Divergent**; Nein → ...

konvergente Majoranten — Ja → **konvergent**; Nein → ...

... →

- $\sum_{n=N}^{M} a_n$ Cauchy
- Majorante + Transformation in (*)
- $a_n \geq 0$ + obere Schranke $\Rightarrow$ W.