Analysis I - Übungsstunde 5

Doppel Folge

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{01} & + & a_{02} & + & a_{03} & = & S_0 \\
+ & & + & & & & + \\
a_{11} & & & & & & S_1 \\
+ & & & & & & + \\
a_{21} & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & = \\
= & & & & & & \\
b_0 & + & b_1 & + & \dots & = & ?
\end{array}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right) = S_0 + S_1 + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\right) = b_0 + b_1 + \dots$$

Können beide konv. sein mit verschiedene Grenzwerten.

Lineare Anordnung $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ falls $\exists$ Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $b_k = a_{\sigma(i,j)}$

Satz (Cauchy)

$$\exists B \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann

$$\left.\begin{aligned} S_i &:= \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \\ U_j &:= \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \end{aligned}\right\} \text{konv. absolut}$$

und $\sum S_i, \sum U_j$ auch mit $\sum S_i = \sum U_j$

Zudem konv. jede lineare Anordnung absolut mit selben Grenzwert.

Cauchy Produkt von $\sum a_i, \sum b_j$

ist $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right)$

Satz 2.7.26

Falls $\sum a_i, \sum b_j$ abs konv. so konv. der Cauchy Produkt $\&$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right)$

Beispiel - Cauchy Produkt von exp

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}$$

Cauchy prod: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^{n-j} \cdot w^j}{(n-j)!\, j!}\right)$ Note: $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ so $\frac{1}{j!(n-j)!} = \frac{\binom{n}{j}}{n!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} z^{n-j} w^j}_{(z+w)^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+z)^n}{n!} = \exp(z+w)$$

$\Rightarrow \exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$

Σ und Limes vertauschen

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Folge als Funktion.

Satz 2.7.28 $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge

(1) $f(j) = \lim_{n\to\infty} f_n(j) \quad \forall j$

(2) $\exists$ Funktion $g : \mathbb{N} \to [0,\infty[$ s.d. (1) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j, n$
(2) $\sum g(j)$ konv.

Dann folgt $\sum f(j) = \lim \sum f_n(j)$

Korollar

$\forall z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ $\quad \lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$

Beispiele - Cauchy prod.

- Falls $|z|<1$ konv. $\sum (-z)^n$ und $\sum z^n$ absolut.

$$\sum (z)^n \sum (-z)^n \overset{C.P}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (-z)^j z^{n-j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j z^j z^{n-j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j$$

$$\overset{0}{1} - \overset{1}{1} + \overset{2}{1} - \overset{3}{1} + \overset{4}{1}$$

$$\underbrace{1-1+1-1}_{=0\ (n=2k+1)} \qquad \underbrace{1-1+1-1+1}_{=1\ (n=2k)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} (z^2)^m \qquad |z^2| = |z|^2 < 1 \cdot 1 = 1 \checkmark$$

$$= \frac{1}{1-z^2}$$

- Tipp 5.2.

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{\text{Geom. Reihe}}$$

$$(n+1)z^n = \underbrace{z^n + \dots + z^n}_{n+1\text{-Mal}} = \sum_{j=0}^{n} z^n = \sum z^{n-j}$$

Stetige Funktionen

Sei D beliebig. $\mathbb{R}^D$ ist die Menge aller Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ (es bildet ein Vektorraum)

$$\left.\begin{array}{ll} & +: (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ \text{SK.} & \cdot: (\alpha \cdot f_1)(x) = \alpha \cdot f_1(x) \\ & \cdot: (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \end{array}\right\} \text{Distr, Assoz, komm.}$$

Konstante Funktion

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbb{0}(x) = 0 & \forall x & f + \mathbb{0} = f \\ \mathbb{1}(x) = 1 & \forall x & f \cdot \mathbb{1} = f \end{array}\right\} \text{Erfüllt die Körper Axiome } (\mathbb{R}^D, +, \cdot)$$

Falls $|D| \geq 2$ $\exists f \neq \mathbb{0}$ das kein f^{-1} besitzt.

Ordnung: $f \leq g$ falls $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$.

Nicht negativ falls: $\mathbb{0} \leq f$

- Beispiele

$$\left.\begin{array}{l} D = \{1\} \\ D = \{1, .., n\} \\ D = \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ Vektorraum aller reellen Folgen} \end{array}\right\} D \text{ ist wichtig!}$$

Def - Beschränktheit Sei $f \in \mathbb{R}^D$

(1) f nach ob. b. falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ ist
(2) f nach unt. b. falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ ist
(3) f besch. falls $f(D)$ ist.

Def - Monotonie $D \subset \mathbb{R}$!

(1) (streng) monoton w. falls $\forall x, y \in D$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(<)$
(2) (streng) monoton f. $\forall x, y \in D$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(>)$

monoton, streng monoton

- Sei $D = \mathbb{R}$ (!!!), $n \in \mathbb{N}$
  $f: x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend falls n ungerade ist.

  Ggbsp. $D = \mathbb{R}^+$ dann $f: x \mapsto x^2$ auch

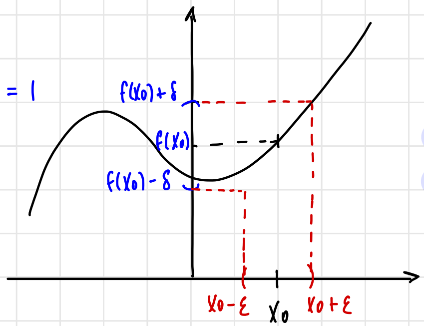
Stetigkeit

<u>Def</u> - Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. $f: D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D$

$$\Big[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Big]$$ Equiv. sei $x \in (-\delta + x_0, \delta + x_0)$

gilt

- Sei ε gegeben: z.B $\varepsilon = 1$



δ nochmals von ε abhängig

f ist <u>stetig</u> falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

<u>Beispiele</u>

- Polynome
- $x \mapsto x^n$
- $x \mapsto |x|$
- T.7

Stetigkeit mittels Folgen Konvergenz

<u>Satz 3.2.4</u> $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$

f ist in x_0 stetig $\Leftrightarrow$ <u>$\forall$</u> (a_n) <u>in D</u> :

$$\Big[\lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = f(x_0) \Big]$$

gilt

Korollar 3.2.5

Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g stetig in x_0.

(1) $\Rightarrow f+g, \lambda f; f \cdot g$ stetig in x_0.
(2) Falls $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in x_0. auf $D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\}$

Def - Polynomiale Funktion

$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

Kor : P sind auf $\mathbb{R}$ stetig

Kor. $P, Q, Q \neq 0$, $m_1, \dots, m_n$ Nullstellen
$\Rightarrow \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{m_1, \dots, m_n\} \to \mathbb{R}$ stetig

0 Zwischenwertsatz

c liegt zwischen x_1 und x_2 falls
$x_1 \leq x_2$ und $c \in [x_1, x_2]$
$x_2 \leq x_1$ und $c \in [x_2, x_1]$

Satz 3.3.1 Bolzano

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in I$.

$\forall c$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\exists z$ zwischen a und b.

Bew OEdA $a \leq b$ nehmen wir an OEdA $f(a) \leq f(b)$

Beispiele - Stetigkeit

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Assume $|x - x_0| < \delta$ Choose δ correctly.

$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1}|$

Fall $x \geq x_0$: $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1}| = \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} \overset{!}{<} \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $\delta = \varepsilon$
Sei $x \in D$ und nehmen wir an dass $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$

$$|\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1}| \leq |(x+1) - (x_0+1)|$$
$$= |x - x_0| < \varepsilon \quad \boxtimes \quad \checkmark$$

- $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nur in $x = 0$ stetig ist $\begin{cases} 1. \text{ in } x=0 \text{ stetig} \\ 2. \text{ in } x \neq 0 \text{ nicht} \end{cases}$

1. sei $|x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta$, finde $\delta = f(\varepsilon)$, damit $|f(x) - 0| < \varepsilon$

also $|f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| < \delta \Rightarrow$ wähle $\delta = \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $\delta = \varepsilon$, sei $x \in D$ und $|x - 0| < \delta \Rightarrow x \in (-\delta, \delta)$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0|$$
$$\underset{0 \in \mathbb{Q}}{\downarrow} \quad = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon \quad \boxtimes$$

2. Sei $x \neq 0$.

a_n in D finden so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(x)$

Fall 1: Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 0$

Wir wollen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq 0$ (also vielleicht x) $\Rightarrow$ Also muss a_n rational sein
$\Rightarrow f(a_n) = a_n$

Sei $x \leq a_n \leq x + \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x + \frac{1}{n} = x$ also Sandwich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

Aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \neq f(x) = 0$.

Fall 2: sei $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = x$.

wir wollen $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq x$ also sei a_n eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(b_n) = 0 \ \forall n$.

Sei $x \leq b_n \leq x + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim b_n = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(b_n) = \lim 0 = 0. \\ f(x) = x \end{array}\right\} \neq.$$

- $x \mapsto x^2$

Type 1: Beweis mit ε

Sei $x_0 \in D$ beliebig

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (-\delta + x_0, \delta + x_0) \ \underbrace{|x^2 - x_0^2| < \varepsilon}.$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x^2 - x_0^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{entweder} & -\varepsilon < x^2 - x_0^2 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x \\ \text{oder} & x^2 - x_0^2 < \varepsilon \Rightarrow x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \end{cases}$$

$$x \in \left(\sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\right)$$

Need the form $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - \delta_1 = \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} \Rightarrow \delta_1 = x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} \\ x_0 + \delta_2 = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \Rightarrow \delta_2 = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0 \end{array}\right\}$$

Asymmetrisch.

Intervall muss sym. sein also wählen wir $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Type 2: Beweis mit Folge.

Sei x_n eine Folge mit $\lim x_n = x_0$.

$\lim f(x_n) = \lim x_n^2 = \lim x_n \cdot \lim x_n = x_0^2 = f(x_0)$ ✓

Stetigkeit Tipps

- Polynome, sin, cos, e, ln. sind stetig
- Beim Brüche, finden wann Nenner $\neq 0$.

Def von Stetigkeit

- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ Tipp: 5.3 left & Right should be same.

$$\begin{cases} f \text{ definiert auf } D \\ \lim f(x) \text{ existiert } \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

- Folgenkriterium. 5.5
- Weierstraß Kriterium → 5.3 Wie wählen wir δ wenn wir wissen $|f-f| \overset{!}{<} |x-y| < \varepsilon$
  (ε- Definition)

Tip:
- $|x-x_0|$ herleiten in $\leq$ von $|f(x)-f(x_0)|$
- Erst Rückwärtsarbeiten also $|f(x)-f(x_0)|$ modifizieren um $f(|x-x_0|)$ zu bekommen
- $f(\delta) < \varepsilon$ und nach δ lösen (wie mit N im konv.) $< f(\delta)$

Fixpunkt Aufgabe

Definiere $g(x) = f(x) - x$: f ist auf $[0,1]$ def, g auch ?

Finde eine untere Schranke von $g(0)$ und von $g(1)$

Sei z zwischen diese $g(0)$ und $g(1)$ ⇒ was ist z gleich?

$\Rightarrow \exists x_0 \in [0,1] \quad g(x_0) = z$

↓

Def. von g einsetzen