Analysis I – Übungsstunde 6

Korrektur Serie 5

Aufgabe 5.4

$D = [0,\infty)$ $\quad f: x \longmapsto \sqrt{x+1}$. f ist in D stetig

$\boxed{\text{z.z}}$ Sei $x_0 \in [0,\infty)$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in [0,\infty)$ $\underbrace{\overset{(*)}{|x - x_0| < \delta}}_{\text{Annahme}} \Rightarrow \left| \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} \right| < \varepsilon$

δ finden als eine Funktion von ε:

$\left| \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} \right| \leq\ ?$ (Hier wäre es hilfreich $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \ \forall x,y \in [0,\infty)$)

mit LHS beginnen

$\downarrow$

(*) herleiten

Seien $x,y \in [0,\infty)$ beliebig

$$\left| \sqrt{x+1} - \sqrt{y+1} \right| = \left| \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}\right) \underbrace{\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}}}_{=1} \right|$$

Wurzeltrick

$$= \left| \frac{(x+1) - (y+1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \right| = \left| \frac{x-y}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \right|$$

$$= \frac{|x-y|}{\underbrace{\left|\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}\right|}_{\geq 1}} \leq |x-y| \quad \square$$

Jetzt δ finden!

$$\left| \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} \right| \leq \overset{\substack{\text{Annahme} \\ \downarrow}}{|x - x_0| < \delta}$$

Wir wollen aber, dass $\left| \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} \right| < \varepsilon$ also wählen wir $\delta = \varepsilon$

Beweis: Sei $x_0 \in [0,\infty)$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $\delta := \varepsilon$

Sei $x \in [0,\infty)$ beliebig so dass $|x - x_0| < \delta$

Es gilt $\left| \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} \right| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon \quad \square$

Aufgabe 5.5

1.) Stetig in $x_0 = \frac{1}{2}$

Z.z $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x - \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(\frac{1}{2})| < \varepsilon}_{\equiv |f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \text{ da } \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}}$

Fall 1: $x \in \mathbb{Q}$ d.h $f(x) = x$ und $|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}|$

Fall 2: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ d.h $f(x) = 1 - x$ und $|f(x) - \frac{1}{2}| = |1 - x - \frac{1}{2}|$

$$= |-x + \frac{1}{2}|$$
$$= |x - \frac{1}{2}|$$

Also im beiden Fälle haben wir $|x - \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon$
also wählen wir $\delta = \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $\delta \overset{(*)}{:=} \varepsilon$, sei $x \in \mathbb{R}$ und $\underbrace{|x - \frac{1}{2}| < \delta}_{(*)}$

$|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |x - \frac{1}{2}| \overset{(*)}{<} \delta \overset{(*)}{=} \varepsilon$ $\square$

2.) Unstetig in $x_0 \neq \frac{1}{2}$

Z.z $\exists (a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{\lim a_n = x_0}_{(*)}$ aber $\lim f(a_n) \neq f(x_0)$

Fall 1: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_0) = 1 - x_0$ ← wir wollen, dass $\lim f(a_n) \neq 1 - x_0$

Erst bilden wir a_n s.d $(*)$
sei $a_n \in \mathbb{Q}$ und $\underset{\downarrow x_0}{x_0} \leq a_n \leq \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\searrow x_0}$

Sandwich Lemma: $\lim a_n = x_0$

und da $a_n \in \mathbb{Q}$ gilt $f(a_n) = a_n$

also $\lim f(a_n) = \lim a_n = x_0 \neq 1 - x_0$

Fall 2: $x_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_0) = x_0$ wir wollen also, dass $\lim f(a_n) \neq x_0$
$x_0 \neq \frac{1}{2}$

Sei $b_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und $x_0 \leq b_n \leq x_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim b_n = x_0$

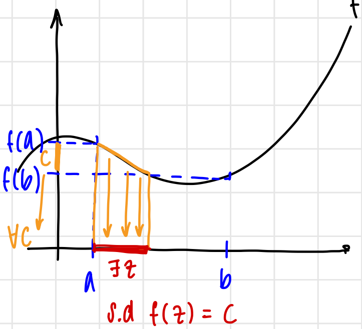
Da $b_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ gilt $f(b_n) = 1 - b_n$

also $\lim f(b_n) = \lim 1 - b_n = 1 - x_0 \neq x_0$

Aufgabe 5.8

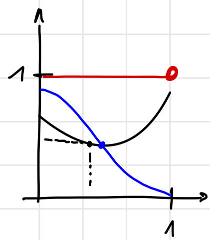
Reminder Zwischenwertsatz: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $a, b \in I$.
Dann $\forall c$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\begin{cases} [f(a), f(b)] & \text{falls } f(a) \leq f(b) \\ [f(b), f(a)] & \text{falls } f(b) \leq f(a) \end{cases}$
$\exists z$ zwischen a und b s.d.

$f(z) = c$



f stetig

In andere Wörter: das Bild eines Intervalls ist ein Intervall falls f stetig ist.



Sei $f: [0,1] \to [0,1]$ z.z $\exists x_0$ s.d $f(x_0) = x_0$

d.h $f(x_0) - x_0 = 0$.

Also definieren wir $g(x) = f(x) - x$

Tip: Zwischenwertsatz hilf beim Aussuchen von Existenz von Nullstellen.

wir wollen z finden s.d $f(z) = 0$.

$g(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0$ da $f(0) \in [0,1] \Rightarrow f(0) \geq 0$
$g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$ da $f(1) \in [0,1] \Rightarrow f(1) \leq 1$

d.h $g(1) \leq g(0)$ und $0 \in [g(1), g(0)] \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0,1]$ s.d $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$ $\varnothing$

Zwischenwertsatz - Nullstellen

I finden s.d die Nullstellen auf D von f in I liegen
Also $a, b \in D$ finden s.d $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$.

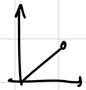
Bsp: $f(x) = x^4 + x^2 - 3 = 0$ auf $(-\infty, 0)$

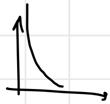
$f(-1) = 1 + 1 - 3 = -1 \leq 0$ $\quad (-1 \in (-\infty, 0))$
$f(-2) = 16 + 4 - 3 = 17 \geq 0.$ $\quad (-2 \in (-\infty, 0))$

$\Rightarrow$ $f(x)$ hat eine Nullstellen auf $(-\infty, 0)$ in $[-2, -1]$

Falls f stetig ist kann f auch beschränkt sein oder ein max erhalten, das hängt aber von D ab!

D $\begin{cases} \text{beschränkt} \\ \text{nicht abgeschlossen} \end{cases}$

→ $= [0,1)$  kein max!

→ $= (0,1]$  unbeschränkt!

Min-Max Satz

Def - Kompaktes Intervall $I = [a,b]$ $\begin{cases} \text{beschränkt} \\ \text{abgeschlossen} \end{cases}$

Min-Max Satz Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf ein kompaktes I. Dann $\exists u, v \in I$ s.d.

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

(f ist beschränkt)

Satz über die Umkehrabbildung

Satz (Verknüpfung)

Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ $f: D_1 \to D_2$, $g: D_2 \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_1$

Falls f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ dann ist $g \circ f: D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

(Erweitert auf D_1, D_2)

Beispiel $|f|(x) = |f(x)|$

Satz sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig + streng monoton.

Dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1}: J \to I$ ist stetig + streng monoton.

Beispiele

(a) $f: I \to \mathbb{R}$
(1) überprüfen, dass I ein Intervall ist.
(2) streng monotonie prüfen
(3) stetigkeit prüfen

$\Rightarrow$ Invertierbar auf I

(b) $\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$\Rightarrow \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$
$\Rightarrow \exp^{-1} = \ln: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Die reelle Exponentialfunktion

Def $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ (*)

$\exp(z) = \lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$

$\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist $\begin{cases} \text{streng monoton wachsend} \\ \text{stetig (*)} \\ \text{surjektiv.} \end{cases}$

$\begin{cases} \exp(x) > 0 \\ \exp(z) > \exp(y) \text{ falls } z > y \\ \exp(x) \geq 1 + x \end{cases}$

Natürlichen Logarithmus

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{streng monoton} \\ \text{bijektiv} \\ \text{stetig} \end{array} \right.$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\exp(\ln(a) + \ln(b))$
$= \exp(\ln(a)) \exp(\ln(b))$
$= a \cdot b$
$= \exp(\ln(ab))$

exp. injektiv
$\Rightarrow \quad \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$

Allgemeine Potenze

$x^a := \exp(a \cdot \ln(x))$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{stetig} \\ \text{bijektiv} \\ \text{streng monoton} \left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend } a > 0 \\ \text{fallend } a < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

$x^0 = 1$

1. $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$
2. $x^{a+b} = x^a x^b$
3. $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Konvergenz von Funktionfolgen

Funktionfolge $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$
$n \mapsto f_n$ $\quad \forall x$ erhält man eine Folge in $\mathbb{R}$ $(f_n(x))_{n\geq 0}$.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$

Punktweise konvergenz → oft haben wir ein Fall Unterscheidung

$\boxed{\forall x \quad f(x) = \lim f_n(x)} \equiv \forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1 : \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$

konv. punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Gleichmässig konvergenz

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{N_\varepsilon}{N} \geq 1$ s.d $\forall n \geq N, \forall x \in D \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{N_{\varepsilon,x}}{N} \geq 1 : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ Punktweise

→ N hängt nur von ε ab (nicht von x)

Satz f_n funktion Folge von stetige Funktionen in D. die gleichmässig gegen f konv.

$\Rightarrow f$ stetig

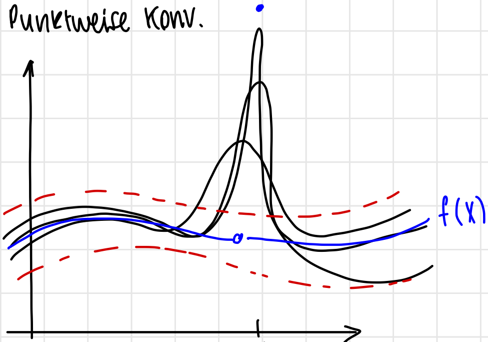
Beispiel

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n^2} + x = x$ für $x \in [0,1]$

$\frac{x}{n^2} + x$ konv. gleichmässig gegen x.

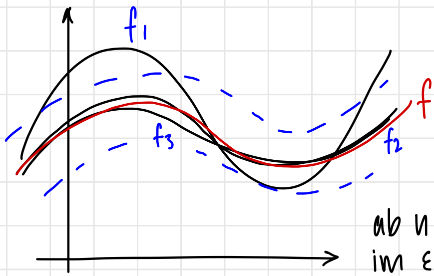
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $N := \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil$, sei $x \in [0,1]$ beliebig dann gilt $\left|\frac{x}{n^2} + x - x\right| = \left|\frac{x}{n^2}\right| = \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
$< \frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}^2} = \varepsilon \quad \square$

Punktweise Konv.



Schon ab $N = 1$ sind f_n im ε-Bereich von $f(x)$ aber nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$
Dieses N ist $\neq 1$ für $x = x_0$ also N hängt von ε <u>und</u> x ab.

Gleichmässig konv.



ab $n \geq 2$ sind die f_n im ε-Bereich von f $\forall x$

Injektiv: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Surjektiv: $f: X \to Y : \forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$

Bijektiv