Analysis I - Übungsstunde 7

Serie 6 - Korrektur

Aufgabe 6.3

Folgenkriterium für Stetigkeit → Stetigkeit zu beweisen
→ wenn Stetigkeit schon bewusst ist verwenden um $\lim f(a_n)$ zu berechnen.

f ist in x_0 stetig falls $\forall a_n \in D$, $\lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = f(x_0)$

Idee: Beim untersuchen von $\lim g(x)$, $g(x)$ als $f(a_n)$ wobei $\begin{cases} 1.\ f \text{ stetig ist} \\ 2.\ \lim a_n \text{ kann man berechnen} \end{cases}$

(a) $$\lim e^{\frac{n^3+2}{n^3-6}} \Rightarrow f(a_n) \text{ wobei } \begin{cases} f(x) = e^x \\ a_n = \dfrac{n^3+2}{n^3-6} \end{cases}$$

$$1.\ \lim a_n = \lim \frac{1+\frac{2}{n^3}}{1-\frac{6}{n^3}} = 1 = x_0$$

Da $a_n \in D$ und $\lim a_n = 1$ und e ist in $x=1$ stetig

$$\Rightarrow \lim e^{a_n} = f(1) = e^1 = e$$

(b) $$\lim \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{n^2/(1+n^2)}+3} = ? \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x}{e^{1/(1+x^2)}+3} \\ a_n = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

e^x → stetig; $e^{1/(1+x^2)}+3 \neq 0$ → stetig

$$\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{n^2/(1+n^2)}+3} = \lim \frac{e^0}{e^{1/(1+0)}+3} = \frac{1}{e+3}$$

(c) Reminder $x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$

$$\lim \ln\left(n^{\frac{1}{\ln(n)}} + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \ln(x) \Rightarrow \ln \text{ stetig in } (0,\infty) \\ a_n = \underbrace{n^{\frac{1}{\ln(n)}}}_{\text{untersuchen das}} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

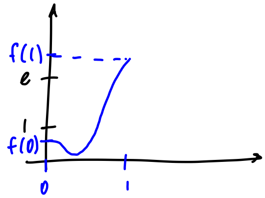
$$n^{\frac{1}{\ln(n)}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(n)} \ln(n)\right)$$
$$= \exp(1)$$
$$= e$$

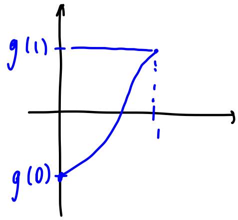
$$\lim a_n = \lim e + \frac{1}{n} = e$$

$$\Rightarrow \lim \ln\left(e + \frac{1}{n}\right) = \ln(e) = 1.$$

Aufgabe 6.1

(a) $f(0) < 1$





$\exists x \in [0,1]$ s.d $f(x) = e^x$

$g(x) = f(x) - e^x$ also $g(x) = 0$ gdw. $f(x) = e^x$

$g(0) = f(0) - 1 < 1 - 1 = 0$

$g(1) = f(1) - e > e - e = 0$

$\Rightarrow$ Zwischenwertsatz ist immer gut für Nullstellen!

(c) f_n konv. gleichmässig gegen f.

Satz 3.7.4. Falls f_n stetig $\Rightarrow$ f stetig

Idee: Teilfolge – (f_{2n}) konv gleichmässig + stetig

---

f stetig $\not\Rightarrow$ $\exists n$: f_n stetig ist

Bsp: $f_n : \begin{cases} \frac{1}{n} & x \leq 0 \\ -\frac{1}{n} & x > 0 \end{cases}$

wenn x nicht in Def. vorkommt $\Rightarrow$ gl. konv.

---

f_n streng monoton $\not\Rightarrow$ f streng monoton

$(f_n) = x^n$, $x \in (0,1)$

$f = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Aufgabe 6.7

(a)

$$f_n(x) = \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2} = \frac{1+n^2x^2}{1+2nx+n^2x^2}$$

$$\lim f_n(x) = \lim \frac{1+n^2x^2}{1+2nx+n^2x^2} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}+x^2}{\frac{1}{n^2}+\frac{2x}{n}+x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad x \in (0,1]$$

$f_n(0) = 1$

$\lim f_n(0) = 1.$

⚠ stetige Grenzwert Funk. aber zufällig!

(b) z.z. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \geq 1 : \exists n > N \ \exists x \in D \ |f_n(x) - 1| \geq \varepsilon$

$$f_n(x) = \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2}$$

Idee: x s.d. die Variablen verschwinden.

$n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$

$x = \frac{1}{n}$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}$$

Also wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall N \geq 1$ $\exists n > N$ $\exists x = \frac{1}{n}$ s.d. $\left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$ ☒

Theorie

Satz 3.7.4

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konv. Wenn f_n für alle $n \geq 1$ stetig ist in einem Punkt $x_0 \in D$ dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: f_n konv. gleichmässig gegen f

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq N : \forall n > N \; |f_n - f| < \varepsilon \quad \underline{\underline{\forall x \in D}} \quad (*)$

f_n ist in x_0 stetig $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \forall n \geq 1 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \quad (**)$

z.z $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

wir untersuchen $|f(x) - f(x_0)|$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) \underbrace{- f_N(x) + f_N(x)}_{+0} \underbrace{- f_N(x_0) + f_N(x_0)}_{+0} - f(x_0)|$$

$$= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))|$$

Δ-Ungl.

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{(*)} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{(**)} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{(*) \text{ da } \forall x \in D}$$

$$< 3\varepsilon$$

Def - Gleichmässig konvergent

$\lim f_n(x) = f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 1 : \forall n > N \; |f_n - f| < \varepsilon \quad \forall x \in D$

Cauchy Kriterium für gleichmässig konv.

$(f_n)_{n \geq 1}$ ist gleichmässig konv. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1 : \forall m, n > N \ \forall x \in D \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Satz

$(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmässig konv. Folge von stetige Funktione $\Rightarrow$ f ist in D stetig.
$\not\Leftarrow$

Def - Reihe von Funktionen

Funktionfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ $\Rightarrow$ Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$\downarrow$

konv gleichmässig $\Leftrightarrow$ S_n konv. gleichmässig

Beispiel

Satz

f_n Funktionfolge mit $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in D$

und $\sum c_n$ konv. $< \infty$ d.h $\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n, m \ |\sum_{n+1}^{m} c_k| < \varepsilon$

dann konv. $\sum f_k$ gleichmässig $= f(x)$

falls alle f_k stetig $\Rightarrow$ $f(x)$ stetig.

Bew: $\sum f_k$ konv. gleichmässig

falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon \ \forall x$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum_{n+1}^{m} f_k| \leq \sum_{n+1}^{m} |f_k| \leq \sum_{n+1}^{m} c_k < \varepsilon$$

Potenzreihen

$\sum c_k x^k$ konv. abs falls $|x| < \rho$

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Satz 3.7.17

Sei $\sum c_k x^k$ mit $\rho > 0$. Dann $\forall \ 0 \leq r < \rho$

$\sum c_k x^k$ konv. gleichmässig in $[-r, r]$

und $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sum c_k x^k$ stetig

Trigonometrische Funktionen - Intuition

Gegeben

$\sin(z) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ ungerade Terme!

$\cos(z) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ gerade Terme

lernen!

Tipp: $\cos(0) = 1$ also cos enthält den Term $x^0 = 1$
$\Rightarrow$ cos ist gerade potenze!

$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

cos   sin

Problem: Vorzeichenwechsel fehlt!
Lösung: $\exp(iz)$ da i^k bringt ein minus bei gerade Potenze.

$\exp(iz) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

$i^1 = 1$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

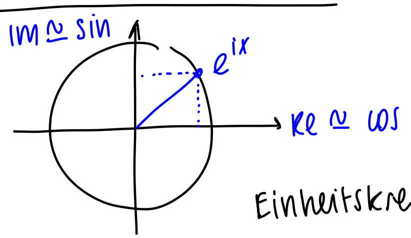
$= \cos(z)$
$\downarrow$
Reel Teil

$= i\sin(z)$
$\downarrow$
Im. Teil

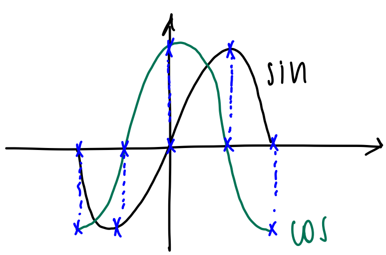
Also
$$\sin(z) = \mathrm{Im}(\exp(iz))$$
$$\cos(z) = \mathrm{Re}(\exp(iz))$$

$\rightarrow$ sin und cos sind komplexe Exponentiale.

Visualisations of sin / cos:



Einheitskreis



$\sin(0) = 0$
sin ungerade

$\cos(0) = 1$
gerade

Trigonometrische Funktionen

$z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Potenzreihen

Falls $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

i^n ist in $\mathbb{R}$ falls $n = 2k$

in $\mathbb{C}$ falls $n = 2k+1$

$\in \operatorname{Im}$ falls $n = 2k+1 \Rightarrow \sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix))$

$\in \operatorname{Re}$ falls $n = 2k \Rightarrow \cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix))$

→ $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig 3.8.1

→ konv. $\forall z \in \mathbb{C}$ absolut $\Rightarrow \rho = \infty$

$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ 3.8.2

$\cos(z) = \cos(-z)$

$\sin(-z) = -\sin(z)$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \leftarrow \cos^k(x)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$\cos(kx)$

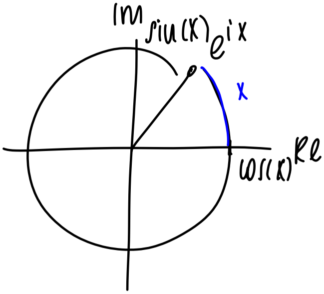
$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

$$\boxed{\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1}$$



x ist die Länge von 1 bis e^{ix}.

7.5

Satz 3.82

Beispiel:

Tipp: $\sin^k(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^k$

$$= \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^k}{(2i)^k} \leftarrow \text{Binomische Formel.}$$

Beispiele:

$$\sin(3x) = \sin(x+2x) = \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x)$$

$$= \sin(x)\underbrace{\cos(x+x)}_{\cos(x)^2 - \sin(x)^2} + \cos(x)\underbrace{\sin(x+x)}_{2\cos(x)\sin(x)}$$

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2e^{ix}e^{-ix}}{4}$$

$$= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot \underset{\cos(0)}{\underset{\downarrow}{1}}$$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

! Bei Potenze von sin/cos, die exp Def. verwenden
Bei $\cos(kx)$, $\sin(kx)$, Additionsatz verwenden

7.6 Tipp:

$$X = \frac{2X}{X} = \frac{2X - Y + Y}{X} = \frac{X-Y}{2} + \frac{X+Y}{2}$$