Korrektur Serie 6

Aufgabe 7.2

$\sum c_k x^k$ konv. gl. falls $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = S_n(x)$ gl. konv. in $\mathbb{R}$

d.h (Cauchy) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1 : \forall n, m > N \ \forall x \in D \ |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

Insebesonders für $n > N+1$ und $m = n-1$ muss gelten

$|S_n(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |c_n x^n| < \varepsilon \quad \forall x \in D$

Falls $\exists n' \geq N$ s.d $c_{n'} \neq 0$

Dann wählen wir $x = \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{\sqrt[n]{|c_n|}}$

$\Rightarrow \left| c_n \left(\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{|c_n|}} \right)^n \right| = \left| \frac{c_n \varepsilon}{|c_n|} \right| = \varepsilon \not< \varepsilon$ ↯

Aufgabe 7.4

Recap: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ Satz $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x) \qquad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$

(a) $\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ da beide >0 sind.

$\frac{1}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow$ sei $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ Also $z^3 + 1 = 0$.

$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$e^{i\frac{\pi}{3}}$ löst $z^3 + 1 = 0$

-1 löst $z^3+1 = 0$ also $z+1$ ist ein Faktor

$z^3+1 = (z+1)(z^2 - z + 1) = 0$

Also $e^{i\frac{\pi}{3}}$ löst $(z^2 - z + 1) = 0$.

Mitternachtsformel: $1 - 4 = -3$.

$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)\right) \geq 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{Im}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)\right) \geq 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

wie im (a) aber mit $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$

Aufgabe 7.5

(a) $\cos(5x) = \cos(x+4x) = \cos(x)\cos(\overset{2(2x)}{4x}) - \sin(x)\sin(4x)$

$= \cos(x)\left(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right) - \sin(x)\,2\sin(2x)\cos(2x)$

$= \cos(x)\left(\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)^2 - 4\sin^2(x)\cos^2(x)\right)$

$- \sin(x)\,4\sin(x)\cos(x)\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)$

$= \cos(x)\left(\cos^4(x)+\sin^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x)\right)$

$- \sin^2(x)\,4\cos(x)$

$= \ldots$

(b) $$\sin^5(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}}{\underset{2i\cdot 16}{32i}}$$

$$= \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)}{16}.$$

Aufgabe 7.6

(b) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ $\Big\}$ streng monoton, bijektiv.

Streng monoton:

Sei $-\frac{\pi}{2} \le x < y \le \frac{\pi}{2}$ z.z $\sin(x) < \sin(y)$

$\Leftrightarrow \sin(y) - \sin(x) > 0.$

7.6.a) $= 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$ $\square$

$\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin(x) > 0 \quad x \in (0, \pi)$

$\cos(x) > 0 \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\frac{y-x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

grösste Wert $y = \frac{\pi}{2}$ $x = -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

kleinste: $x = -\frac{\pi}{2}$ $x < y = -\frac{\pi}{2} + \delta$

$$\frac{\delta - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} > \frac{0+\delta}{2} \approx 0.$$

3.8.1

sin ist stetig + streng monoton

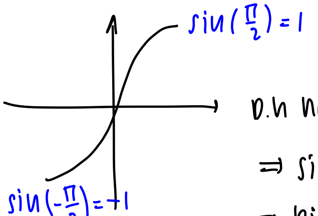
3.5.3

$\Rightarrow$ sin ist umkehrbar

$\Rightarrow$ sin ist injektiv

Bleibt z.z dass sin ist surjektiv d.h $[-1,1]$ abdeckt.

Aber da sin ist stetig und streng monoton ist reicht es $\sin(-\frac{\pi}{2})$ zu berechnen
$\sin(\frac{\pi}{2})$



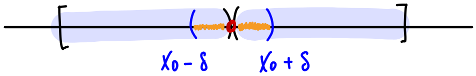
D.h nach den zws. $\forall c \in [-1,1]\ \exists z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ s.d $\sin(z) = c$

$\Rightarrow$ sin deckt $[-1,1]$ ab

$\Rightarrow$ bijektiv.

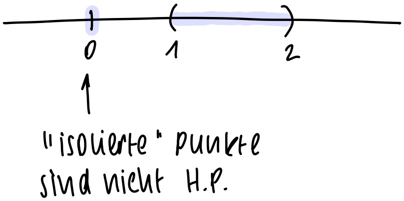
Häufungspunkte von $D \subset \mathbb{R}$ ist ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ (oder $= \pm\infty$) wobei $\exists a_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim a_n = x_0$

Falls $\forall \delta > 0 \ ((-\delta + x_0, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$



Die Umgehbung von x_0 muss in D sein.

Beispiel



$x_0 = [1, 2]$

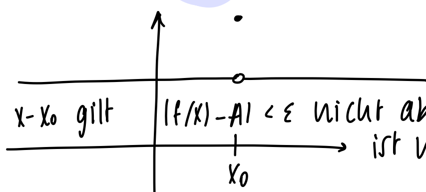
Closes gaps.

Def: Sei x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann is A $(\pm\infty)$ den Grenzwert von f für $x \to x_0$ wenn:

$\forall a_n \in D \setminus \{x_0\}$ gilt : $\lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = A$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Fall: $x_0 = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$ $\quad A = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$



Beim x-x_0 gilt $|f(x) - A| < \varepsilon$ nicht aber trotzdem ist $\lim f(x) = A$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$: Def: $\forall c > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D : f(x) < -c$

Stetigkeit : $x_0 \in D$

f stetig in x_0 $\iff$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert in $\mathbb{R}$

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ (handles $\pm$ lim)

Falls $x_0 \notin D$ kann man nicht von Stetigkeit in D sprechen.

Lösung: f erweitern.

Wenn $x_0 \notin D$ aber $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ in $\mathbb{R}$ existiert dann ist.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0

Eigenschafte von lim:

$f, g : D \to \mathbb{R}$ und lim in D existieren, dann folgt.

- $\lim f(x) + g(x) = \lim f + \lim g$
  $\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$

Wenn $f \leq g$

- dann ist $\lim f \leq \lim g$ falls $\exists$

Sandwichlemma

- $g_1 \leq f \leq g_2$ $\lim g_i \; \exists$ mit $\lim g_1 = \lim g_2$

  $\Rightarrow \lim f = \lim g_i$

Beispiel $\frac{\sin x}{x}$

Satz von Leibniz

$$\underbrace{a_2 - a_1 \leq S_n \leq a_1}$$

(*) $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$

$(-x)^2 = x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ Für $x \in [0, \sqrt{6}]$ gilt $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$

$$1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \longrightarrow \text{gilt für } x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$$

da $\frac{\sin(x)}{x}$ und x^2 gerade sind (*)

$$\lim 1 - \frac{x^2}{3!} = \lim 1 = 1 \Rightarrow \lim \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Beispiel $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Satz von Leibniz: $\begin{cases} a_n \geq 0 \\ \lim a_n = 0. \\ a_n \text{ monoton fallend} \end{cases}$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$x^2 \leq 2n(2n-1)$$

$$x^2 \leq 4n^2-2 \qquad \forall n \geq 1$$

$$x^2 \leq 4-2$$

$$x \leq \sqrt{2}$$

$$1 \geq \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$0 \geq \cos(x) - 1 \geq -\frac{x^2}{2!}$$

$$0 \geq \frac{\cos(x)-1}{x} \geq -\frac{x}{2!}$$

$$\underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow}$$

Examples of limits

- $$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{!}{\neq} \lim x^2 \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}^{\text{existiert nicht}}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-x^2} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}\right) \qquad \infty - \infty \ \lightning$$

Faktorisieren!

$$\lim \left(\frac{x^2 + x - x}{x(x^2+x)}\right) = \lim \frac{x^2}{x(x^2+x)} = \lim \frac{x^2}{x^2(x+1)} = \lim \frac{1}{x+1} = 1. \checkmark$$

Satz 3.10.6

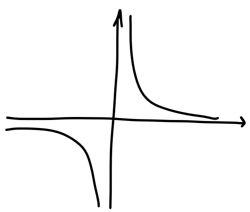
x_0 H.P von D und $f: D \to E$

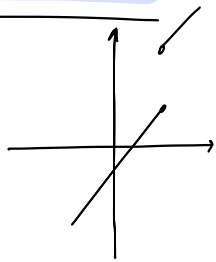
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Falls $g: E \to \mathbb{R}$ in y_0 stetig ist dann gilt.

$$g(y_0) = \lim g(f(x))$$

Links & rechtsseitige Grenzwerte





$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

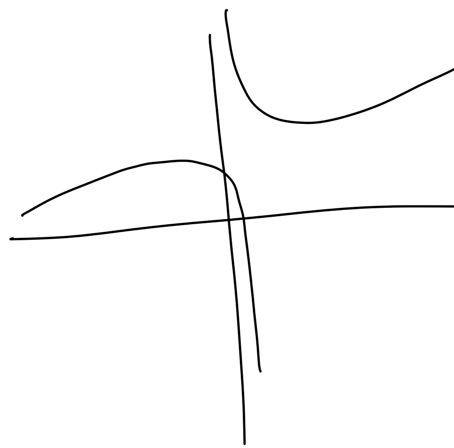
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Beispiel

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x - 4}{x - 3}$$

$$\frac{\text{Zahl}}{\text{"0"}} = \pm\infty$$

	<3	>3
$x-3$	$-$	$+$
x^2-x-4	$+$	$+$
Q	$-$	$+$



$\lim\limits_{x \to x_0}$ $\nearrow$ Faktorisieren!

Tipps Serie 8

8.2 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $= A$ falls $\forall a_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim a_n = x_0$
gilt $\lim f(a_n) = A$.
Satz 2.1.8.

8.3

	$x < 2$	$x > 2$
$x-2$	$-$	$+$
x^2-x+2	$+$	$+$
Q	$-$	$+$.

sign.f