Analysis 1 - Übungsstunde 9

Aufgabe 8.2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall (a_n) \in D \ \lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = A$

seien $\lim f(x) = A$

$\lim g(x) = B$

sei $a_n \in D \setminus x_0$ mit $\lim a_n = x_0$ dann gilt $\begin{cases} \lim f(a_n) = A \\ \lim g(a_n) = B \end{cases}$

2.1.8 $\Rightarrow \lim f(a_n) + g(a_n) = A + B$

Dies gilt $\forall a_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim a_n = x_0$

Insbesonders die folge $x \to x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = A + B$

Aufgabe 8.3

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

Für $x \neq 0, 2$ $\quad \frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

$1+\frac{1}{x}$ ist in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig (stetig forsetzung von f!)

$\lim \frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = \lim 1 + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

(a) 1. $\lim\limits_{x\to 2} \left| \frac{x^2-x-2}{x-2} \right| = \infty$

	$x<2$	$x>2$
x^2-x-2	+	+
$x-2$	—	+
Q	—	+

"In der nähe"

$\to 2^- = -\infty \quad \to 2^+ = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \neq \lim\limits_{x\to 2^-}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-x+2}{x-2} = +\infty$

Aufgabe 8.4

Reminder $x^a = \exp(a \ln(x))$

$$2^x = \exp(x\ln(2)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x\ln(2))^i}{i!} \geq \underbrace{\frac{(x\ln(2))^{k+1}}{(k+1)!}}_{\text{Minorante}}$$

irgendwo kommt den Term $i=k$ vor

$$\frac{2^x}{x^k} \geq \frac{x^{k+1} \frac{\ln(2)^{k+1}}{(k+1)!}}{x^k}$$

$$= \underbrace{x \cdot \frac{\ln(2)^{k+1}}{(k+1)!}}_{\longrightarrow \infty}$$ divergente "Minorante"

Aufgabe 8.6

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = y \iff \forall a_n \in D \setminus \{0\} \ \lim a_n = 0 \Rightarrow \lim f(a_n) = y$

sin nimmt Werte in $[-1,1]$ also $\lim \sin(x) \in [-1,1]$ falls $\exists$.

Also wenn wir zeigen $\forall y \in [-1,1] \ \exists a_n \in D \setminus \{0\}$ mit $\lim a_n = 0$ und $\lim \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = y$ dann haben wir ein Gegenbeispiel für jedes mögliche Grenzwert.

sei $y \in [-1,1]$ beliebig

$\sin : [0, 2\pi) \to [-1,1]$ surjektiv d.h $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ s.d $\sin(\theta) = y$

1. wollen $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ $\qquad a_n = \frac{\text{"} \ell \text{"}}{g(n)}$

2. wollen $\lim \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = y$

$$\text{d.h } \frac{1}{a_n} = \theta + 2k\pi \quad (\text{da } \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)) \ 2\pi\text{-periodisch}$$

$$\text{Also } a_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi} \quad \begin{cases} \lim \frac{1}{\theta + 2\pi n} = 0 \\ \lim \sin(\theta + 2\pi n) = \sin(\theta) = y \end{cases}$$

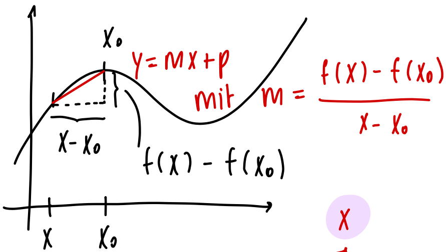
(b) $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{array}{ccccc} -x & \leq & x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \leq & x \\ \downarrow {\scriptstyle x \to 0} & & \downarrow {\scriptstyle \text{S.L.}} & & \downarrow {\scriptstyle x \to 0} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Differenzierbare Funktionen

Def. - f ist in x_0 diff. falls $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. $\Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

"Infinetisimal change"



Also die Tangente hat Gleichung

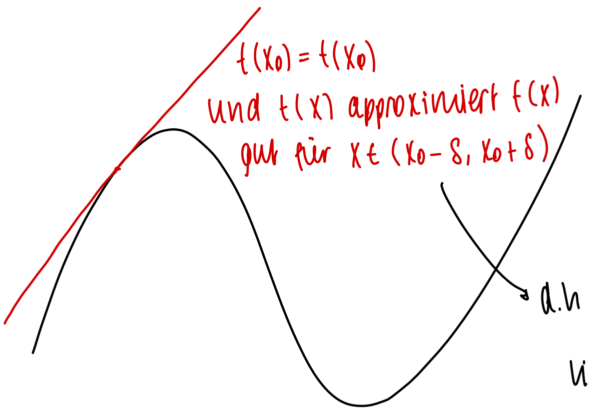
$t(x) = f'(x_0)\,x + p$ und in x_0 $f(x_0) = t(x_0)$

$\underline{p}$: $t(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + p = f(x_0)$

$\Rightarrow p = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$

$t(x) = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Alternative: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\overbrace{x_0 + h}^{x}) - f(x_0)}{h}$ $\quad x := x_0 + h \quad \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0 = h}$



d.h. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - t(x)}{x - x_0} = 0$

$\lim \dfrac{f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$

$= \lim \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim \dfrac{f'(x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}}$

$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$

Bsp: $f(x) = x$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$

---

f diff ist äquiv zu:

(1) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ und $r: D \to \mathbb{R}$ mit

- $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
- $r(x_0) = 0$ und in x_0 stetig

Satz 4.1.4

f ist in x_0 diff $\Leftrightarrow \exists \phi: D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

$\Rightarrow \phi(x_0) = f'(x_0)$

ϕ ist eine stetige Fortsetzung von f'

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

Beispiel: x^2 in $x_0 = 0$.

$\phi(0) = 0.$

$\phi(1) = \frac{1}{1} = 1$

$\phi(-1) = \frac{1}{-1} = -1$

$\phi(2) = \frac{4}{2} = 2$

$$\boxed{f \text{ in } x_0 \text{ diff} \Rightarrow f \text{ in } x_0 \text{ stetig}}$$

Nicht Diff:

- $f(x) = |x|$ (aber stetig)

Diff:

- $\exp$ $\quad \exp' = \exp$
- $\sin, \cos$

  $\sin' = \cos$

  $\cos' = -\sin$

- exp $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h} = \lim \frac{e^{h} - 1}{h}$$

$$e^{h} - 1 = t$$

$$h = \ln(t+1)$$

$$h \to 0 : e^{h} - 1 \to 0 : t \to 0$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln\left(\underset{\substack{\downarrow \\ e}}{(t+1)^{1/t}}\right)} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

- sin: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(x_0)\underbrace{\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)}_{\to 0} + \lim \cos(x_0)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} = \cos(x_0)$$

Funktionen wobei $f = f'$:

$c\exp(x)$ ist die einzige Lösung in $\mathbb{R}$

Eigenschaften von Ableitung f, g in x_0 diff

1) Linearität: $(\alpha f' + \beta g')(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

2) Produktregel: $(fg)(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

3) Quotient: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Kettenregel

$f: D \to E$ $\quad x_0$ HP von D

$g: E \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_0) =: y_0$ HP von E

f, g in x_0, y_0 diff. $\Rightarrow g \circ f(x_0)$ diff.

$\Rightarrow (g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Wichtige Ableitungen:

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

  $\ln'(y) = \frac{y'}{y}$

- $(x^a)' = (\exp(a\ln(x)))'$

  $= \exp'(a\ln(x)) \cdot (a\ln(x))'$

  $= \exp(a\ln(x)) \cdot a\frac{1}{x}$

  $= x^a \cdot a \cdot x^{-1}$

  $= a x^{a-1}$

- $(xe^x)' = xe^x + e^x$

  $= (x+1)e^x$

Zentrale Sätze über die erste Ableitung

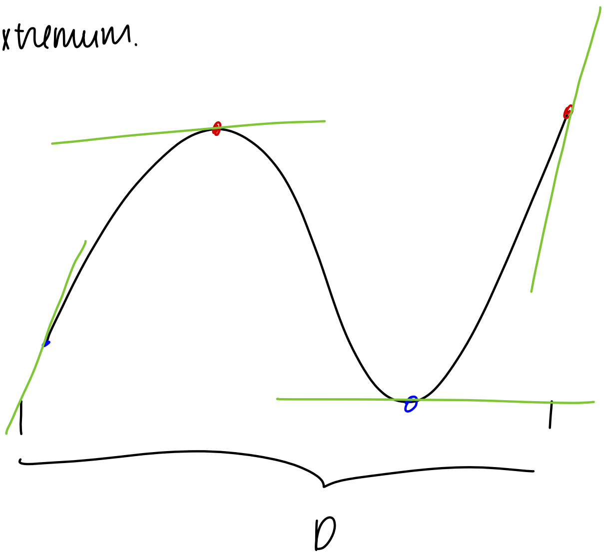
Def -

1) Lokales min. in x_0 wenn $\exists \delta > 0$ s.d.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

2) Lokales max.

$\Rightarrow$ lokales Extremum.



Satz 4.2.2

Falls f in x_0 ein lokal. Extremum besitzt und x_0 ist ein links und recht HP. dann folgt. $f'(x_0) = 0$.

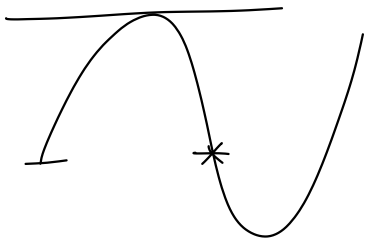
Rezept min/max:

1. $f(x_0) = 0$ lösen. Nullstellen genauer aussuchen
2. Randpunkte aussuchen.

Satz von Rolle

$a < b$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff.

Wenn $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

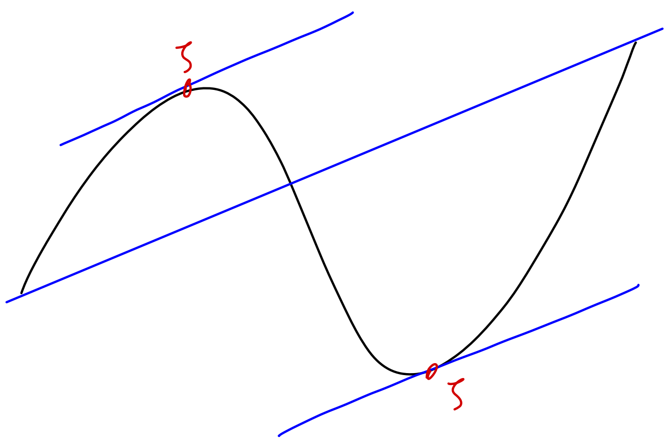


(Min-Max Satz)

Mittelwertsatz

$[a,b]$ stetig, (a,b) diff.

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Umkehr

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Beispiel

- $f(x) = (x-\beta)^2 - 2 \quad x \geq 0$

  $f(x) = \alpha \sin(x) \quad x < 0$

Stetig $\lim\limits_{x \to 0^+} (x-\beta)^2 - 2 = \beta^2 - 2 \overset{!}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \alpha \sin(x) = 0$

$\Rightarrow \beta^2 = 2$

$\beta = \pm\sqrt{2}$

Diff $\exists! \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(x-\beta)^2 - 2 - (\beta^2 - 2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2\beta x + \cancel{\beta^2} - \cancel{2} - \cancel{\beta^2} + \cancel{2}}{x}$

  $= \lim\limits_{x \to 0^-} x - 2\beta = -2\beta$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\alpha \sin(x)}{x} = \alpha$

$\Rightarrow \alpha = -2\beta \qquad (\alpha, \beta) = \{(-2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

Korollar

1) Falls $\forall \xi \in (a,b)$ $f'(\xi) = 0 \Rightarrow f$ konstant.

2) Falls $f(\xi) = g(\xi)$ $\forall \xi$

$\Rightarrow \exists c$ mit $f(x) = g(x) + c$

3) $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend.