Allgemeine Mechanik

1. Newton Mechanik

Galilei Gruppe : IS – IS

Schwerpunkt : $X = \frac{1}{M}\sum m_i x_i$. Bei Streuprozessen bleibt $P = XM$ erhalten.

System mit N Teilchen ist ein mechanisches System falls $F(x_1(t),..,x_N(t), \dot{x}_1(t),.., \dot{x}_N(t), t) = \sum m_i \ddot{x}_i$

Galileische Relativitätsprinzip : Beweis, dass F_{ik} von der Form : $f_{ik}(|x_i - x_k|)\frac{x_i - x_k}{|x_i - x_k|}$ ist.

$F_{12}(x_1, x_2) = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$, define $x_i'(t') = R x_i(\underbrace{\lambda(t'-a)}_{t}) + v\lambda(t'-a) + b$.

Relativitätsprinciple verlangt $m_1 \frac{dx_1'}{dt^2} = F_{12}(x_1', x_2')$ $\Rightarrow$ F is only dependent on $x_1 - x_2$.

Invarianz unter Rotation $\rightarrow$ $RF_{12}(x) = F_{12}(R(x))$. Sei $Rx = x$ $\Rightarrow$ $RF_{12}(x) = F_{12}$ $\Rightarrow$ $F_{12}(x) = f_{12}(x)\frac{x}{|x|}$

zudem $f_{12}(Rx) = f_{12}(x)$, $\forall R$ $\Rightarrow$ $f_{12}(x) = f_{12}(|x|)$

(Kräfte besitzen stets ein Potential $F_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V_{ik}(|x_i - x_k|)$)

Relativitätsprinzip verlangt : $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1,..,x_N)$ $\Leftrightarrow$ $m_i \frac{d^2 x_i'}{dt'^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i'} V(x_1',..,x_N')$

$\hookrightarrow$ $V(Rx_1 + a,.., Rx_N + a) = V(x_1,..,x_N)$.

Erhaltungssätze (Mechanische Systeme)

- Impulssatz : $\frac{d}{dt}\sum p_i = \sum F_i$
- Drehimpulssatz : $\frac{d}{dt}\underbrace{\sum x_i \wedge p}_{L} = \sum x_i \wedge F = M$
- Energiesatz : $\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2}_{T} = \sum_i F_i \cdot \dot{x}_i$

invariant unter eukl. transf.

Für Systeme mit $F = -\frac{\partial}{\partial x} V$: $F = 0$, $M = 0$, $\sum F_i \cdot \dot{x}_i = -\frac{dU}{dt}$

Bew : $e \cdot F = -\frac{d}{d\lambda} V(x_1 + \lambda e,.., x_N + \lambda e)|_{\lambda=0} = 0$.

$e \cdot M = \sum e \cdot (x_i \wedge F_i) = \sum (e \wedge x_i) \cdot F_i = -\frac{d}{d\varphi} V(R(\varphi)x_1,.., R(\varphi)x_N)|_{\varphi=0} = 0$.

Beschleunigte Bezugssystem

$$x = R(t)\,y + b(t) \;\longrightarrow\; \dot{x} = \dot{R}y + R\dot{y} + \dot{b} \quad , \quad \ddot{x} = \ddot{R}y + 2\dot{R}\dot{y} + R\ddot{y} + \ddot{b}$$

$\hookrightarrow^{(R^T R = 1)}$

$$m\ddot{y} = \underbrace{R^T F}_{K \text{ Kraftvektor}} - mR^T\ddot{R}y + m2R^T\dot{R}\dot{y} + m\underbrace{R^T\ddot{b}}_{a \text{ accel of } y=0.} \quad , \quad R^T R y = \omega \wedge y$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{y} = K - \underbrace{2m(\omega\wedge\dot{y})}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m(\dot{\omega}\wedge y)}_{\text{doesn't show up a lot}} - \underbrace{m\omega\wedge(\omega\wedge y)}_{\text{Zentrifugal}} - \underbrace{ma}_{\text{Führungskraft}}$$

Zweikörpersystem

$$M\ddot{X} = 0 \qquad x = x_1 - x_2 \quad , \ddot{x}_1 = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V(|x_1 - x_2|)$$

$$\mu\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}V(|x|)$$

<u>Flächensatz</u>: $F(t)$ Fläche die vom Vektor $x(t)$ in der Bahnebene überstrichene Fläche.

$$\Rightarrow \quad \dot{F}(t) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{\ell}{2\mu} = \text{konst.}$$

$|L| = \mu r^2\dot{\varphi}$? $\leftarrow$ Drehimpuls erhaltung

Energie erhaltung:

$$T + V = \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E = \text{const.}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = E \quad , \quad U(r) = \frac{\ell}{2\mu r^2} + V(r)$$

eff. Potential

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}$$

$$\Rightarrow \quad t(r) - t(r_0) = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(x))}} \qquad \text{and} \qquad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{\ell\, dx}{x^2\sqrt{2\mu(E - U(x))}}$$

verschiedene Bahntypen

gebundene Bahnen

$r(t)$ periodisch mit Periode T.

$$T(E) = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U)}} \quad , \quad r_{min/max} \text{ sind Nullstellen von } E - U(r).$$

Falls r_{min} und r_{max} Umkehrpunkte $\Rightarrow T < \infty$. Sonst (ein Gleichgewichtspunkt) $T = \infty$.

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell\, dx}{x^2\sqrt{2\mu(E - U(x))}}$$

Rosettenbahn im Ring $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ (closed if $\Delta\varphi/2\pi$ rational).

Streubahnen

$(U(r) \longrightarrow \infty, r \longrightarrow \infty)$

{

Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$, $\theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell\, dx}{x^2\sqrt{2\mu(E - U(x))}} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{b\, dx}{x^2\sqrt{1 - V(x)E^{-1} - b^2 x^{-2}}}$

? p. 19 ?

Keplerproblem

Bewegung eines Teilchens (m) im Gravitationsfeld von M_0.

$$U(r) = -\frac{1}{r} G M_0 m. \quad , \mu = \frac{M_0 m}{M_0 + m} \longrightarrow \mu \ddot{x} = -\frac{x}{r^3} G M_0 m$$

$$\left(\hookrightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu \dot{x}^2 - V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 e_r + r^2 \dot{\varphi}^2 e_\varphi\right) - V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\left(\frac{\mu}{2} r^2 \overset{\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}}{\dot{\varphi}^2} e_\varphi - V(r)\right)}_{U(r).} \right)$$

$$\hookrightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}, \quad U(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{G M_0 m}{r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}$$

Complicated Subs

$$\longrightarrow r = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad 1 - \varepsilon^2 = \frac{-2E\ell^2}{G^2 M_0^2 m^2 \mu}, \quad d = \frac{\ell^2}{G M_0 m \mu}$$

Ellipse: $\varepsilon < 1$, $E < 0$
Parabel: $\varepsilon = 1$, $E = 0$
Hyperbel: $\varepsilon > 1$, $E > 0$

! Skipped 22, 23

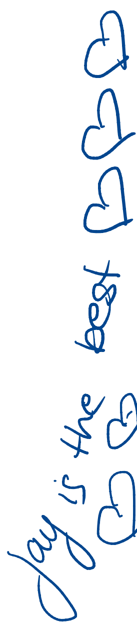
Lenz Runge Vektor

$$A = \mu \dot{x} \wedge L - G M_0 m \mu \frac{x}{r}$$

$$\mu \frac{d}{dt}\frac{x}{r} = \mu\left(\frac{\dot{x}}{r} - \frac{x}{r^2}\underset{\llcorner \frac{x \cdot \dot{x}}{r}}{\dot{r}}\right) = \frac{\mu}{r^3}\left(\dot{x} r^2 - x(x \cdot \dot{x})\right) = -\frac{\mu}{r^3} x \wedge \underbrace{(x \wedge \dot{x})}_{L}$$

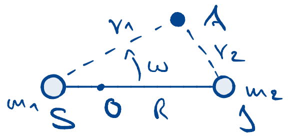
$\hookrightarrow \dot{A} = 0.$

- $A \perp L$.
- $A^2 = (G M_0 m \mu)^2 + 2\mu E \ell^2$
- liegt in der Bahnebene
- Richtung: Ursprung zum Perihel
- $L \wedge A$ gibt uns Bahnkurve von $\dot{x}(t) = \frac{1}{\mu \ell^2} L \wedge A + \frac{G M_0 m}{\ell^2} L \wedge \frac{x}{r}$ ((Kreis um $\frac{1}{\mu\ell^2} L \wedge A$ mit $R = \frac{G M_0 m}{\ell}$)



Dreikörperprobleme

Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität



Zentrifugal $\overset{!}{=}$ Gravitational

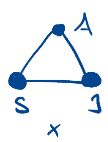
$$\Rightarrow \frac{G}{R^2} m_1 m_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} R\omega^2, \quad \text{we chose} \quad \overline{S,O} = \frac{R m_2}{m_1 m_2}, \ \overline{J O} = \frac{R m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\omega = 1, R = 1, G = 1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 1.$$

Set $m = 1 \Rightarrow$

$$G = -\frac{m_1}{r_1^3}(y_1 + m_2, y_2, y_3) - \frac{m_2}{r_2^3}(y_1 - m_1, y_2, y_3)$$
$$Z = (y_1, y_2, 0)$$
$$C = 2(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0)$$

Gleichgewicht $\Rightarrow y_3 = 0$, $y_2 = 0$ (Euler Spezialfall)
or
$\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} = 1$ (Lagrange Spezialfall) $\longrightarrow r_1 = r_2 = 1.$



Stabilität von Lagrange: linearisiere G, $(\to r_i^{-3} = 1 - 3 e_i \cdot x)$

$$\Rightarrow G \approx \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{m_2 - m_1}{2} \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{G_0} + \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{matrix} + \mathcal{O}(x^2), \quad Z = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - m_2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Z_0} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = 2 \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow G_0 + Z_0 = 0 \xrightarrow{\text{solve DGL}}$ 4 reelle Lösung $\to$ oszillatorisch und beschränkt

$\Rightarrow$ sehr stabil !.

Bewegung der Mondes

Skipped

look if time permits.

Schwingungsprobleme

Allgemeine Theorie linearer Bewegungsgleichungen

$$\dot{z} = A(t) z + b(t)$$

Exp. 1-dim Oszillator mit Reibung und Anregung. $m\ddot{x} = -fx - r\dot{x} + k(t)$.

$\hookrightarrow z(t) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$. $\alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}$, $\beta = \frac{r}{2m}$, $\gamma(t) = \frac{k(t)}{\sqrt{fm}}$

Lösung $\dot{z} = Az \leftarrow$ freie Schwingungen. Autonom falls A indep. of t.

Propagator $P(t,s): z(s) \mapsto z(t)$.
- $P(t,r)P(r,s) = P(t,s)$
- $P(s,s) = 1$
- $\frac{\partial}{\partial t} P(t,s) = A(t) P(t,s)$

$\Leftrightarrow P(t,s) = 1 + \int_s^t A(t_1) P(t_1, s)\, dt_1$.

Autonom $\Rightarrow P(t,s) = P(t-s)$

$$\frac{d}{dt} P(t) = AP(t) \Rightarrow P(t) = e^{At} = \sum \frac{(At)^n}{n!}$$

$\hookrightarrow$ Autonom falls $k(t) = 0$.

$$\Rightarrow (A + \beta 1)^2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}^2 = -\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2)}_{=:\omega_0^2} 1. \Rightarrow e^{(A+\beta 1)t} = 1 \cos\omega_0 t + (A + \beta 1) \frac{1}{\omega_0} \sin\omega_0 t, (\omega_0 \neq 0)$$

$$\hookrightarrow e^{At} = e^{-\beta t} \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} \sin\omega_0 t & \frac{\alpha}{\omega_0} \sin\omega_0 t \\ -\frac{\alpha}{\omega_0} \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t - \frac{\beta}{\omega_0} \sin\omega_0 t \end{pmatrix}, \quad z(t) = e^{At} z(0).$$

$\to x(t) = \ldots$

- Für $\beta > \alpha$ wird ω_0 imaginär $\to \cos\omega_0 t = \cosh|\omega_0|t$, $\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{|\omega_0|} \sinh|\omega_0|t$.

- Im Fall $\alpha = \beta \Rightarrow \omega_0 = 0 \Rightarrow (A + \beta 1)^2 = 0 \Rightarrow e^{(A+\beta 1)t} = 1 + (A + \beta 1)t = \begin{pmatrix} 1 + \beta t & \alpha t \\ -\alpha t & 1 - \beta t \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow x(t) = x(0) e^{-\beta t}(1 + \beta t) + \dot{x}(0) e^{-\beta t} t$.

Eigenschwingungen sind die Lösungen der Form $z(t) = a e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^n$

↪ $Aa = \lambda a$.

Falls die EV von A ganz $\mathbb{C}^n$ aufspannen ⇒ Jede Lsg lin.komb von Eig.Schwing.

und $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$ (Spektrum), $P_\lambda a = \begin{cases} a, & \text{falls } Aa = \lambda a \\ 0, & \text{falls } Aa = \nu a,\ \nu \neq \lambda \end{cases}$, ↪ $\sum P_\lambda = 1$.

$$\Rightarrow e^{At} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} P_\lambda \quad \Rightarrow \quad z(t) = \sum e^{\lambda t} P_\lambda \, z(0)$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $a_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}$ lin unab $\Leftrightarrow \omega_0 \neq 0$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

↪ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Schwingendes System heisst **stabil** falls keine Lösung für $t \to \infty$ unbeschränkt wächst

$\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda \le 0$, $\forall \lambda$.

A diagbar

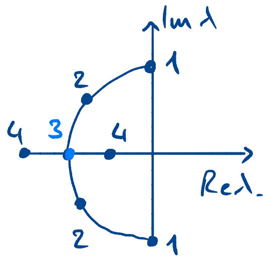
System heisst **dissipativ**, falls es eine pos.def quad. Form (z,z) in $\mathbb{R}^n$ gibt. sd:

$$\frac{d}{dt}(z,z) \le 0, \ \forall \text{ Lösung } z(t).$$

Bsp. Oszillation ohne Anregung.: $(z,z) = \underbrace{\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + f x^2)}_{\text{Gesamtenergie}}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}$

↪ $\frac{d}{dt}(z,z) = m\ddot{x}\dot{x} + f\dot{x}x = -r\dot{x}^2 \le 0$ (solange $\beta = \frac{r}{2m} \ge 0$)

↪ $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$



1: $\beta = 0$
2: $0 < \beta < \alpha$
3: $\beta = \alpha$
4: $\beta > \alpha$

Dämpfung bei (3), $\beta = \alpha$ am grössten (kritische Dämpfung) (am dissipativsten?)

Erzwungene Schwingungen

Allg. Lösung inhomogenen Systems: $z(t) = P(t,s)\, z(s) + \int_s^t d\tau\, P(t,\tau)\, b(\tau)$

Bei Autonome Systeme: $z(t) = e^{At} z(0) + \int_0^t d\tau\, e^{A(t-\tau)} b(\tau)$, $b(t) = b e^{i\omega t}$, $b \in \mathbb{C}^n$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow z(t) = e^{At} z(0) + \int_0^t d\tau\, e^{\tau(i\omega - A)} e^{At} b = e^{At} z(0) + (i\omega - A)^{-1}(e^{i\omega t} - e^{At})\, b$$

$i\omega \notin \sigma(A)$ da sonst $(i\omega - A)$ nicht inv.bar

A strikt stabil $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

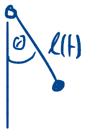
Für grosse t gilt dann: $z(t) = e^{i\omega t}(i\omega - A)^{-1} b$, $\quad (i\omega - A)^{-1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{P_\lambda}{i\omega - \lambda}$

-- last part pg. 44

Anwendungen

Parametrische Resonanz.

periodische Zeitabh. $\dot z = A(t) z \quad , A(t) = A(t+T)$.



$\ell(t) = \ell(T+t)$.

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{m\ell^2\dot\theta}_{mr^2\omega}) = \underbrace{-mg\ell\sin\theta}_{r\wedge F} \;.\; \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\ell\theta) = \frac{\ddot\ell - g}{\ell}(\ell\theta)$$

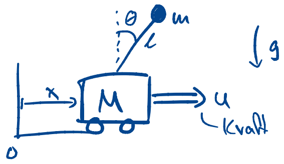
Propagator P : $P(nT) = P^n(T)$. $\longrightarrow$ EW von $P(T)$: $|\lambda| > 1 \longrightarrow$ exp. wachsend

$|\lambda_k| < 1 \longrightarrow$ beschränkt

P diagbar

Skipped p.$^{end}_{\hookrightarrow}$45, 46, 47

Stabilisierung linearer Systeme



$(M+m)\ddot x + m\ell\ddot\theta = u$

$m\ddot x + m\ell\ddot\theta = mg\theta$?

$(M=1,\, g=\ell)$

$\hookrightarrow \quad z = \begin{pmatrix} \ell\theta \\ \ell\dot\theta \\ x \\ \dot x \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \dot z = Az + bu(t)$

Rückkopplung

$\hookleftarrow$ Falls Kraft u von den Koordinaten (und Ableitungen) abhängt

Sei $u = r^T z \quad , r \in \mathbb{R}^n \quad$ (linear von z abh.)

Falls $r \in \mathbb{R}^n$ so gewählt werden kann : $A + br^T$ stabil ist. So nennen wir

$\dot z = Az + bu(t)$ stabilizierbar.

Dies gilt wenn $\underline{\{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\}\ \mathbb{R}^n \text{ aufspannen}}$. $\longleftarrow$

Bew weggelassen

$$\left| \begin{array}{l} (M+m_1+m_2)\ddot x + m_1\ell\ddot\theta_1 + m_2\ell\ddot\theta_2 = u \\ m_1\ddot x + m_1\ell\ddot\theta_1 = m_1 g\theta_1 \\ m_2\ddot x + m_2\ell\ddot\theta_2 = m_2 g\theta_2 \end{array} \right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \ell(\ddot\theta_1 - \ddot\theta_2) = g(\theta_1 - \theta_2)$$

$\Rightarrow \theta_1 - \theta_2$ nicht stabiliziert.

Lagrange

Fermatprinzip : Light picks shortest path. ($n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ )

Barichstochronenproblem

$\dot{y} = \sqrt{2gy}$

$$T = \int \frac{1}{\dot{y}}\, ds = \int_0^a \overbrace{\sqrt{\frac{y'(x)^2+1}{2g\,y(x)}}}^{F \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}}}\, dx.$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (y(x)'^2 + 1)\, dx^2$

We want to minimize T, $\underline{\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F = \frac{\partial}{\partial y} F}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(y'^2+1)}} \overset{!}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{y}\frac{\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \qquad \overset{!}{=} \qquad \Rightarrow y'' = -\frac{1+(y')^2}{2y}$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{y(y'^2+1)}} + y'\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{y(y'^2+1)}}y' - \frac{1}{\sqrt[3]{(y'^2+1)}}\frac{y'y''}{\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y(y'^2+1)}}\left(y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'^2 y''}{y'^2+1}\right)$$

alternatively do $0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\alpha} T(F + \alpha h)$

Euler-lagrange

Extremalprobleme für Funktionale $S(f) = \int_{x_1}^{x_2} dx\; s(f(x), f'(x), x)$

$$\hookrightarrow \underline{\frac{\partial s}{\partial f} = \frac{d}{dx}\frac{\partial s}{\partial f'}}$$

Kettenlinie und Lagrange Multiplikatoren

$$V = \int_{-a}^{a} g\, y(x) \sqrt{1+y'(x)^2}\, s\, dx, \qquad L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} L\, dx$$

$$S[y(x), \lambda] = \int_{-a}^{a} \left[g\, y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\, s + \lambda\left(\sqrt{1+y'(x)^2} - \frac{1}{2a}L\right)\right] dx$$

Euler Lagr. $\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y'\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \sqrt{1+y'^2} \overset{g = y+\lambda}{\Longrightarrow} g'^2 - gg'' + 1 = 0$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$-g^2\left(\frac{g''}{g}\right)' = 0 \xrightarrow{g \neq 0} g'' = cg \Rightarrow g = A\cosh(\sqrt{c}\,x) \qquad g(x) = g(-x)$$

Hamiltonsche Prinzip.

$L = T - V$ (T: kin Energie, V: pot. Energie) $\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}$ sind die Newtonsche Beweg. gl. (Hamiltonschen Prizips)

($S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ nennt man Wirkung der Bahn $q(t)$)

Bewegungsgleichung unter Zwangsbedingung

1) $T = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{x}_i^2$, $V = V(x_i)$ in kart. Komponenten

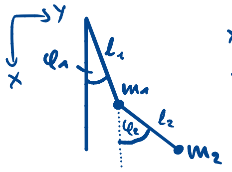
2) Write the posible Konfigurations using q and 6.

3) Put into $L = T - V$.

4) Euler Lagrange.

maybe look at pg. 62 Bsp 3.

Doppelpendel



$x_1 = l_1(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$ $\longrightarrow$ $\dot x_1 = l_1\dot\varphi_1(-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1)$ $\longrightarrow$ $T = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2\dot\varphi_1^2 + m_2 l_1^2\dot\varphi_1^2 + m_2 l_2^2\dot\varphi_2^2\right)$

$x_2 = x_1 + l_2(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$ $\quad$ $\dot x_2 = \dot x_1 + l_2\dot\varphi_2(-\sin\varphi_2, \cos\varphi_2)$ $\quad$ $+ m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1^2\dot\varphi_2^2 \underbrace{(\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$

$V = -m_1 g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$

Äquivalente Lagrangefunktionen

L_1 & L_2 sind äquivalent falls $L_1 - L_2 = \frac{d}{dt}F(q,t)$. $\Rightarrow$ $\delta\int_{(1)}^{(2)}\frac{d}{dt}F(q,t)\,dt = \delta F(q,t)\Big|_{(1)}^{(2)} = 0$. $\Rightarrow$ same Euler Lagrange

Zyklische Koordinaten

falls $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$ so nennt man q^α zyklisch $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}p_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = 0$ (konjugierte Impuls)

$\hookrightarrow$ p_α ist eine Erhaltungsgrösse.

falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow$ $E = \sum p_\alpha \dot q^\alpha - L$ erhalten

falls $L = T - V$, $T = \frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta$, V unabh. von Geschwindigkeit. $\Rightarrow$ $E = T + V$. (Energie).

skipped Bsp 3 again pg. 65.

maybe check example with sphärisches pendel!

Noether's Theorem

Nennen Schar von Abb ϕ^λ, von $\mathbb{R}^f \to \mathbb{R}^f$ einen Fluss, falls $\phi^0 = id$, $\phi^\lambda \circ \phi^\mu = \phi^{\lambda+\mu}$

- Jeder Fluss hat ein erzeugendes Vektorfeld $v(q)$ auf $\mathbb{R}^f$, $v(q) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\phi^\lambda(q)\Big|_{\lambda=0}$.

Wegen Gruppeneigenschaft $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi^\lambda(q) = v(\phi^\lambda(q))$ $\qquad$ $[\phi^\lambda(q)]^\alpha =: \varphi^\alpha(\lambda; q^1, \dots, q^f)$

$\hookrightarrow v^\alpha(q^1, \dots, q^f) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi^\alpha(\lambda; q^1, \dots, q^f)\Big|_{\lambda=0}$

$\longrightarrow$ $\frac{dq}{d\lambda} = v(q(\lambda))$, $q(0) = q$.

ϕ^λ ist ein kontinuierliche Sym. von $L(q,\dot q,t)$, falls $L(\phi^\lambda(q(t)), \frac{\partial}{\partial t}\phi^\lambda(q(t)), t) = L(q(t), \dot q(t), t)$ $\} + \frac{\partial F}{\partial t}$, $\forall\lambda$. $t \mapsto q(t)$

Noethers theorem: Zu jeder Symmetrie gehört eine Erhaltungsgrösse.

Explizit: Sei ϕ^λ eine kont. sym. so ist $\langle p, v(q)\rangle \equiv \sum_{\alpha=1}^{f} \underset{\text{konj. Impuls}}{p_\alpha} v^\alpha(q)$ erhalten.

d.h $\frac{d}{dt}\langle p, v(q)\rangle = 0$.

Beweis: $\frac{d}{dt}\left(\sum\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}v^\alpha(q)\right) = \sum\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}v^\alpha(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot v^\alpha(q) = \sum\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi^\lambda(q)\Big|_{\lambda=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\phi^\lambda(q)\Big|_{\lambda=0}$

$= \frac{d}{d\lambda}L\left(\phi^\lambda(q(t)), \frac{\partial}{\partial t}\phi^\lambda(q(t)), t\right) = 0.$

da ϕ^λ eine kont. Symm.

falls q^α zyklisch

$\Longrightarrow$ $\phi^\lambda(q^\beta) = q^\beta + \delta^{\beta\alpha}\lambda$ eine kontin. Symm. und $v^\beta = \delta^{\beta\alpha}$ $\Rightarrow$ $\langle p, v(q)\rangle = p_\alpha$

Allgemeiner kann der Fluss auch Zeit transformieren: $(q,t) \mapsto (\phi^\lambda(q,t), \tau^\lambda(q,t))$

$$v(q,t) = \frac{d}{d\lambda}\phi^\lambda(q,t)\Big|_{\lambda=0} \quad \& \quad \delta\tau(q,t) = \frac{d}{d\lambda}\tau^\lambda(q,t)\Big|_{\lambda=0}$$

Die Invarianzeigenschaft ist dann: $L(q^\lambda(\tau), \frac{d}{d\tau}q^\lambda(\tau), \tau)\Big|_{\tau=\tau^\lambda(q(t),t)} \cdot \frac{d\tau^\lambda}{dt} = L(q(t), \frac{dq}{dt}, t) + \frac{d}{dt}F(q(t),t,\lambda)$

⋮

Erhaltungsgrösse $K = \langle p, v(q)\rangle - (\langle p,\dot q\rangle - L)\delta\tau - \delta F$

Zeit translation: $\phi^\lambda = id$, $\tau^\lambda(t) = t+\lambda$

Erhaltene Grösse: $L - \langle p,\dot q\rangle = L - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha$

Erhaltungssätze revisited

$$L(x_1,\dots,x_N,\dot x_1,\dots,\dot x_N) = \frac{1}{2}\sum m_i \dot x_i^2 - V = T - V. \qquad (V(Rx_1+a,\dots,Rx_N+a) = V(x_1,\dots,x_N))$$

$\hookrightarrow$ Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = m_i \dot x_i$

1) Zeittranslationen : $E = T + V$ (Energie)

2) Räumliche Translationen: $\phi^\lambda(x_1,\dots,x_N) = (x_1+\lambda a,\dots,x_N+\lambda a) \longrightarrow v(\underline{x}) = (a,\dots,a) \Rightarrow P\cdot a$ erhalten, $\forall a$ (Gesamtimpuls.)
$\hookrightarrow P$ erhalten

3) Drehungen: L ist invariant unter Drehungen $\phi^\lambda(x_1,\dots,x_N) = (R(e,\lambda)x_1,\dots,R(e,\lambda)x_N)$ (Winkel $=\lambda$ um e.)

$\hookrightarrow v(\underline{x}) = (e\wedge x_1,\dots,e\wedge x_N) \Rightarrow \sum m_i\dot x_i\cdot e\wedge x_i = e\cdot\sum x_i\wedge m_i\dot x = e\cdot L$, $\forall e$

$\hookrightarrow$ Gesamtdrehimpuls L erhalten

4) speziellen Galileitransformationen: $\phi^\lambda(x_1,\dots,x_N,t) = (x_1+\lambda vt,\dots,x_N+\lambda vt)$, $\tau^\lambda(t) = t$.

$$\Rightarrow v = (vt,\dots,vt),\ \delta\tau = 0$$

$$L(x^\lambda(t),\dot x^\lambda(t)) = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot x_i+\lambda v)^2 - V(x_1+\lambda vt,\dots,x_N+\lambda vt)$$
$$= L + \underbrace{\sum m_i\left(\dot x_i\lambda v + \frac{\lambda^2 v^2}{2}\right)}_{:=\frac{dF}{dt}} \longrightarrow F = \sum m_i\left(x_i\lambda v + \frac{\lambda^2 v^2}{2}t\right) \to \delta F = \sum m_i x_i\cdot v$$

$$\Rightarrow K = \langle p, v(q)\rangle - \delta F = \sum m_i\dot x_i\cdot vt - m_i x_i\cdot v = -(MX - Pt)\cdot v$$

$\hookrightarrow$ Schwerpunktsintegral ist erhalten

Das Prinzip von Mauperitus

Sei $T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot q^\alpha\dot q^\beta$, $V = V(q)$ und $T(q,\dot q) > 0$, $\dot q \neq 0$.

$\hookrightarrow E = \sum p_\alpha \dot q^\alpha - L = T + V$ erhalten

Skipped

Hamiltonsche Systeme

Idea: Instead of using Lagekoords und ihre Geschwindigkeit we want to use speed and konj. Impuls

konj. Impuls: $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}$, verallgemeinerte Kraft: $K_\alpha = \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}$

$\hookrightarrow \frac{dp_\alpha}{dt} = K_\alpha$.

Legendretransformation:

We have $f \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow u = f'(x) \to (f')^{-1}(u) = x$.

We want Potential $g(u)$ s.t $\frac{dg}{du} = (f')^{-1}(u) = x \longrightarrow g(u) = x f'(x) - f$.

Wir machen dasselbe mit $x = \dot q^\alpha$, $u = p_\alpha$ und kriegen Hamiltonfunk $H(q,p,t)$.

$\dot q = \dot q(q,p,t)$, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} \longrightarrow \sum p_\alpha \dot q^\alpha - L(q,\dot q,t) =: H(q,p,t)$

$\hookrightarrow dH = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum \left(\dot q^\alpha dp_\alpha + \cancel{p_\alpha d\dot q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} d\dot q^\alpha - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}} dq^\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$= \sum \left(\dot q^\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot q^\alpha$, $\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

We can do this if $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta} \right)_{\alpha,\beta = 1,\dots,f}$ inv.bar. (falls pos-def. sogar global)

$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} \to \dot q^\alpha$.

Phasenraum und Poissonklammer

$x = (q^1, p_1, \dots, q^f, p_f)$ Phasenkoords. $\longrightarrow \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \dot x_k$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sei $F(q,p)$ ein bel. Funktion auf dem Phasenraum.

$\hookrightarrow \frac{d}{dt} F(q(t),p(t)) = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot q^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \dot p_\alpha \right) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) = \sum \frac{\partial H}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_k}$

- $\{F,G\} := \sum \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q^\alpha}$ Poissonklammer.

$\hookrightarrow \frac{d}{dt} F(q(t),p(t)) = \{F,H\}(q(t),p(t))$

$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot q + \frac{\partial H}{\partial p}\dot p + \frac{\partial H}{\partial t} = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$

- $\{q^\alpha, q^\beta\} = 0$, $\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$, $\{p_\alpha, p_\beta\} = 0$.
- $\{F,G\} = -\{G,F\}$
- $\{\lambda F_1 + \mu F_2, G\} = \lambda\{F_1,G\} + \mu\{F_2,G\}$
- $\{F, G_1 \cdot G_2\} = \{F,G_1\} \cdot G_2 + G_1 \cdot \{F,G_2\}$
- Jacobi Identität: $\{\{F_1,F_2\},F_3\} + \{\{F_2,F_3\},F_1\} + \{\{F_3,F_1\},F_2\} = 0$.

$\bar F = F \circ \phi^t$
$\phi^t(\bar x) = x$

$\hookrightarrow \frac{d}{dt} F \circ \phi^t \big|_{t=0} = \{F,H\} \Rightarrow \{F\circ\phi^t, G\circ\phi^t\} = \{F,G\}\circ\phi^t \longrightarrow \{\bar F, \bar G\}(\bar x) = \{F,G\}(x)$

von zeitunabh. Hamiltonfunkt. erzeugter Fluss. $\phi^t(q,p) = (q(t),p(t))$

Kanonische Transformationen

kanonische Transformationen: bij. Koord.transf. : $x_i = x_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2f})$ welche $\sum \varepsilon_{ik} \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial x_i}$ forminv. lassen

$$\hookrightarrow A^T(\bar{x})\, \varepsilon A(\bar{x}) = \varepsilon, \; \forall \bar{x}, \quad A_{ij}(\bar{x}) := \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}$$

$$\Rightarrow \{F, G\} = \{\bar{F}, \bar{G}\}, \quad \bar{F}(\bar{x}) = F(x), \; \bar{G}(\bar{x}) = G(x)$$

$$\text{Bew: } \{\bar{F}, \bar{G}\} = -\sum_{jk} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_j} \varepsilon_{jk} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{x}_k} = -\sum_{ijkl} \frac{\partial F}{\partial x_i} \underbrace{A_{ij} \varepsilon_{jk} A_{lk}}_{\varepsilon_{il}} \frac{\partial G}{\partial x_l} = \{F, G\}$$

$$\sum_{j,k} A_{ij} \varepsilon_{jk} A_{lk} = \varepsilon_{il}$$

Die lin. Abb. $A: \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}^{2f}$ mit $A^T \varepsilon A = \varepsilon$ heissen symplektisch und es gilt $(\det A)^2 = 1$.

Bsp. $q^\alpha = q^\alpha(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^f) \longrightarrow \bar{p}_\alpha = \sum_\beta p_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial \bar{q}^\alpha}$

Symplektische Geometrie

Skipped ASK how important it is

Kanonische Flüsse

Sei $\phi^\lambda: x \mapsto y(x, \lambda)$ ein Fluss kanonischer Abb., dann $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = v_i(y) \leftarrow$ das erzeugende Vektorfeld.

We want $v(x)$ that generate kanonische Flüsse. d.h $A_{ik}(x, \lambda) = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}(x, \lambda)$ ist symplektisch.

$$\hookrightarrow v_\ell = \frac{d y_\ell}{d\lambda}, \quad \sum \varepsilon_{ik} \frac{d y_k}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \leftarrow \text{erzeugende Funktion}$$

Autonom (H unabh. von t): Dynamik durch kanonical flow ϕ^t gegeben $x(t) = \phi^t(x_0)$

Satz von Liouville:

Phasenvolumen $\mu(\Omega) = \int_\Omega dx_1 \dots dx_{2f}$ jeder $\Omega \subset \Gamma$ (Phasenraum) ist invariant unter Zeitentwicklung: $\mu(\phi^t(\Omega)) = \mu(\Omega)$

$$\underline{\text{Bew}}: \; \mu(\phi(\Omega)) = \int_{\phi(\Omega)} dy_1 \dots dy_{2f} = \int_\Omega \underbrace{\left|\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|}_{=1} dx_1 \dots dx_{2f} = \mu(\Omega)$$

gilt für alle kanon. Flüsse

$\Rightarrow$ Wiederkehrsatz von Poincaré

Sei ϕ^t volumenerhaltender Fluss auf Phasenraum Γ und $G \subset \Gamma$.
mit $\mu(G) < \infty$ und $\phi^t(G) \subset G$.

$\hookrightarrow$ fast alle $x \in \Omega^G$ sind Wiederkehrpunkte ($x \in G$ Wiederkehrp falls bel. grosse t gibt $\phi^t(x) \in \Omega$)

6.7 Erhaltungsgrössen

$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow F$ ist erhalten falls $\{F,H\} + \frac{\partial}{\partial t}F = 0$

Seien F, G erhaltungsgrössen $\Rightarrow \{F,H\} = 0 \; \{G,H\} \Rightarrow \{F,G\} = 0$.

$$\frac{d}{dt}F(\phi^t(x))\Big|_{t=0} = \{F,H\} = -\{H,F\} = -\frac{d}{d\lambda}H(\psi^\lambda(x))\Big|_{\lambda=0}$$

$\hookrightarrow$ F Erhaltungsgrosse $\Leftrightarrow$ H invariant unter dem von F erzeugten Flusse ψ^λ. $(H(\psi^\lambda(x)) = H(x))$.

Das Hamiltonsche Prinzip im Phasenraum

$$\delta\int_{(1)}^{(2)}\Big(\sum_\alpha p_\alpha \dot q^\alpha - H\Big)dt = 0 \quad \text{und} \quad \delta\int_{(1)}^{(2)}\Big(\sum P_\alpha \dot Q^\alpha - \overset{K(\tilde x,t)\text{ Hamilton}}{K}\Big)dt = 0$$

Lsg $x = (q_1, p_1, \dots, q^f, p_f)$ $\longleftrightarrow$ Lsg $\tilde x = (Q^1, P_1, \dots, Q^f, P_f)$

i) $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}(q,P,t)$

ii) $Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q,P,t)$

iii) $K = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t)$

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow q^\alpha = q^\alpha(Q,P,t), \quad p_\alpha = p_\alpha(Q,P,t)$$

$S(q,P,t)$ heisst erzeugende Funktion der kanonischen Transformation

Starre Körper

Eulerwinkel

$x = 0 = y \Rightarrow x = Ry$

1. Drehung	x_3	φ
2. "	K	θ
3 "	y_3	ψ

Bild!

$$R = R(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor eines Kreisels

$x = R(t)y \longrightarrow L = \sum m_i x_i \wedge \dot x_i = \sum m_i Ry_i \wedge \dot R y_i$ $\quad (\Omega = R^T\dot R \to \Omega y = \omega \wedge y \dots)$

$\Rightarrow \Theta_{jk} = \sum m_i\big((y_i \cdot y_i)\delta_{jk} - (y_i)_j (y_i)_k\big) \Rightarrow L = RS, \; S_j = \sum_{k=1}^{3}\Theta_{jk}\omega_k$

sym. $\quad$ $\llcorner$ Trägheitstensor $\quad \xrightarrow{\text{cont.}} \Theta_{jk} = \int dm(y)\,(y^2\delta_{jk} - y_j y_k)$

EV von Θ sind Hauptträgheitsachsen
EW " Hauptträgheitsmomente

$\hookrightarrow$ $T = \frac{1}{2}\int dm(x)\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} \Theta_{ik}\,\omega_i\omega_k$

$\hookrightarrow$ Θ positiv semidef. (pos. def falls Massenverteilung nicht entartet)

Hauptachsensystem: $\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}$, $S_i = \Theta_i\omega_i$, $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Theta_i\omega_i^2$

Freie Kreisel

Bewegungsgleichung: $\dot{L} = M$. frei $\Rightarrow M = 0$.

$L = RS \to \dot{L} = \dot{R}S + \dot{S}R = 0 \Rightarrow \dot{S} = -R^T\dot{R}S = -\omega\wedge S$

$\Rightarrow$ im Hauptachsensystem: Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_1 &= (\Theta_2-\Theta_3)\,\omega_2\omega_3 \\ \Theta_2\dot{\omega}_2 &= (\Theta_3-\Theta_1)\,\omega_3\omega_1 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 &= (\Theta_1-\Theta_2)\,\omega_1\omega_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{T} = 0.$$

Raumfeste Ebene ist die Tangentialebene am Trägheitsellipsoid im Punkt ω.

Permanente Rotationen

$\omega = (\omega_1^0, 0, 0) \longrightarrow$

If you have to check stability: $\omega = (\omega_1^0 + \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ lineare Näherung

$\hookrightarrow$ $\lambda^2 = \frac{(\Theta_3-\Theta_1)(\Theta_1-\Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}(\omega_1^0)^2 \longrightarrow \lambda$ reell oder imagin.

reell: $\Theta_3 > \Theta_1 > \Theta_2$ or $\Theta_2 < \Theta_1 < \Theta_3$ $\to$ instabil

imag: stabil

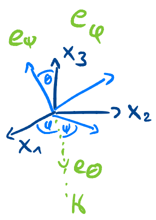
$\hookrightarrow$ 2 Stabile: kleinste und grössten Hauptträgheitsmoment

Symm. freie Kreisel

$\Rightarrow$ $\dot{\omega}_3 = 0$, $\dot{\omega}_1 = -\alpha\omega_2$, $\dot{\omega}_2 = \alpha\omega_1$, $\alpha = \frac{\Theta_3-\Theta_1}{\Theta_1}\omega_3$

Der schwere symm. Kreisel

o.B.d.A $\Theta_1 = \Theta_2$.



$\hookrightarrow$ Schwerpunkt auf 3-Achse $(0,0,\ell)$

use Eulerwinkel : körperfest

$e_\psi = e_3$

$e_\Theta = e_1 \cos\psi - e_2 \sin\psi$

$e_\varphi = \sin\Theta \sin\psi\, e_1 + \sin\Theta \cos\psi\, e_2 + \cos\Theta\, e_3$

$\hookrightarrow \omega = \dot\varphi e_\varphi + \dot\Theta e_\Theta + \dot\psi e_\psi$

$\hookrightarrow T = \frac{1}{2}\Theta_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\Theta_3}{2}\omega_3^2 \longrightarrow L = T - V, \; V = mg\ell\cos\Theta$

$= \frac{\Theta_1}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\Theta + \dot\Theta^2) + \frac{\Theta_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\Theta)^2$

Erhaltungssätze

L does not depend on φ, t, ψ

$\Rightarrow$ Erhaltungsgrössen : $E = T + V$

$$\begin{cases} p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = S \cdot e_\varphi \\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = S \cdot e_\psi \end{cases}$$

Projektion auf des Drehimpulses auf e_φ und bzw e_ψ

Vertikale — Symmetrie Achse

Integration der Bewegungsgleichungen

– Nutationsbewegung $\Theta(t)$

skipped

Der schnelle Kreisel.

$E_{rin} \gg 2mg\ell$.

Nutation kleiner desto schneller Kreisel.

skipped

Reine Präzession

skipped

Die spezielle Relativitätstheorie

Das Gesetz der Lichtausbreitung

$$c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2=0$$

Die Postulate von Einstein

1. Relativitätsprinzip: Die Naturgesetze sind unabhängig vom Koordinatensystem (alle Naturgesetze haben die gleiche Form in Koord.syst. die sich mit konst. Geschwind. relativ zueinander bewegung)

2. Konstanz der Lichtgeschw.: Licht hat dieselbe Geschwindigkeit in allen I.S

4er: $x=(ct,x,y,z)$

Koordstransf. muss Lichtkegel auf Lichtkegel

- Metrik $g_{\mu\nu}$ die Lichtkegel beschreibt ($\underbrace{\forall x \text{ auf Lichtkegel}}_{\text{Lichtartig}}$: $x^T g x=0$)

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

- 4er Skalprodukt: $(x,y)=g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$
- Lorentztransformation: $\Lambda^T g\Lambda=g$ $\quad (g_{\mu\nu}=\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu g_{\rho\sigma})$

(• Poincaré Gruppen: $x^\mu\mapsto\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu+a^\mu$)

$\hookrightarrow$ $\det(\Lambda)^2=1$

eigentliche orthochrone Lorentzgruppe

	$\det\Lambda=1$	$\det\Lambda=-1$
$\Lambda^0{}_0\geq 1$	1 $\quad L_+^\uparrow$	P $\quad L_-^\uparrow$
$\Lambda^0{}_0\leq -1$	PT $\quad L_+^\downarrow$	T $\quad L_-^\downarrow$

PT: $-\mathrm{Id}.$

P: $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$ Raumspieglung

T: $\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$ Zeitumkehr

- spezielle Lorentztransformationen ("boost"):

$$\Lambda(u)=\begin{pmatrix}\cosh(u)&-\sinh(u)&&\\-\sinh(u)&\cosh(u)&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)=\Lambda(u_1+u_2)$

– Alle $\Lambda\in L_+^\uparrow$ lassen sich als $\Lambda=\Lambda(R_1)\Lambda(u)\Lambda(R_2)$ schreiben

Bew Sei $\Lambda\in L_+^\uparrow$, $M=\{x \mid x^0=(\Lambda x)^0=0\}$ $\Rightarrow$ Fall 1: $\dim M=3\longrightarrow\Lambda=\begin{pmatrix}a_0&0&0&0\\a_1&&&\\a_2&&R&\\a_3&&&\end{pmatrix}$, $\Lambda^T g\Lambda=g\Rightarrow\dots$

Fall 2: $\dim M=2\xrightarrow[\text{use Drehung}]{}\Lambda=\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}$, $\Lambda^T g\Lambda=g\Rightarrow B^TB=\mathbb{1}$ $\hookrightarrow C=0$ ...

Kovariante und kontravariante Tensoren

<u>Kontravariant</u>: Indizes oben $\quad (\hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$

- $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$

- $x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu$ (<u>kovariant</u>)

  $\hookrightarrow x_\nu \quad \Lambda_\nu{}^\mu x_\mu = \hat{x}_\nu$

- $\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\rho{}^\nu = \delta^\mu_\rho \,, \quad \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\nu_\rho$

<u>Bew</u> $\quad \Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma$

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\rho{}^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \, g_{\rho\sigma} g^{\nu\tau} \Lambda^\sigma{}_\tau = g_{\rho\sigma} g^{\mu\sigma} = \delta^\mu_\rho$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\tau} \Lambda^\sigma{}_\tau = g^{\mu\sigma}$$

$$g_{\pi\mu} g^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\pi = \Lambda_\pi{}^\sigma \Lambda^\sigma{}_\tau \quad \ldots$$

- $$\frac{\partial f}{\partial \hat{x}^\mu} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \Lambda_\mu{}^\nu$$

Relativistische Mechanik

Bewegung eines Teilchens im $\mathbb{R}^4$ wird durch <u>Weltlinie</u> dargestellt. $x(\lambda) = (x^0(\lambda), \mathbf{x}(\lambda))$ bei Kurvenparam.

Bogenlänge: $\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda}\right)} = \int_{s_1}^{s_2} ds \longrightarrow ds^2 = (dx, dx)$

$\quad$ Minkowski Skalp.

eind. bis auf $\pm s + a$

$\quad$ Lorentzinvariant

Eigenzeit: $\tau = \frac{s}{c} \qquad \left(ds^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt\right.$

raumartig: $(x, x) < 0 \qquad$ zeitartig $(x, x) > 0 \qquad$ (ds ist zeitartig)

Pseudovektoren (da $d\tau' = \mathrm{sgn}(\Lambda^0_0) d\tau$)

$$u = \frac{dx}{d\tau}, \; p = mu \Rightarrow \hat{u}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu, \; \hat{p}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

$\longrightarrow (u, u) = c^2 \quad \& \quad (p, p) = m^2 c^2$

$\Rightarrow (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$

Zeitdilatation: Beobachter die Uhr in Bewegung sieht: $t \cdot \gamma$ (langsamer)

Längenkontraktion: S still, $\hat{S} \xrightarrow{v} \hat{L} = \frac{L}{\gamma}$

Lagrange Formulierung

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0$$

skipped

Hamilton - Jacobi

we want to find a time ind. kanonische Transformation s.d $H(Q,P) = P_f$

$$\Rightarrow \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial Q^\alpha} = 0 ,\ \forall \alpha \quad , \dot{Q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = 0 ,\ \forall \alpha \neq f ,\ \dot{Q}^f = 1 .$$

$S = S(q^1, \dots, q^f, P_1, \dots, P_f)$ unabh von t $\Rightarrow$ $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}(q,P)$, $Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q,P)$, $K = H(q,p)$

$K = P_f \Rightarrow H(q^1, \dots, q^f, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^f}) = P_f$ zeitunabh. Hamilton-Jacobi

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right)_{\alpha = 1,\dots,f,\ \beta = 1,\dots,f-1} = f-1 \longrightarrow \text{vollständige Lösung}$$

Seperable Probleme

Falls man $H(q^1, \dots, q^f, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^f}) = P_f$ als $f(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}) = F(q^2, \dots, q^f, \frac{\partial S}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^f})$ aufspalten kann. So heisst q^1 separierbar.

$$S(q^1, \dots, q^f) = S_1(q^1) + \tilde{S}(q^2, \dots, q^f) \Rightarrow f(q^1, \frac{dS_1}{dq^1}) = P_1 ,\ F(q^2, \dots, q^f, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^f}) = P_1 \ \text{- const.}$$

Das ebene Zentralkraftproblem

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r) = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right) + V(r) = E = P_2$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mr^2(E - V(r)) - r^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 \longrightarrow \text{seperable}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = \ell^2 = P_1^2 \ \text{const.} \Rightarrow S_\varphi = \varphi \cdot \ell ,\ S_r = \int^r \sqrt{2m(E - V(r)) - \ell^2 s^{-2}}\, ds$$

$$\hookrightarrow Q^1 = \frac{\partial S}{\partial \ell} = \varphi - \int \frac{\ell}{2} \frac{ds}{\sqrt{\dots}} = \text{konst} = Q^1$$

$$Q^2 = \frac{\partial S}{\partial E} = \int^r \frac{m\, ds}{\sqrt{\quad}} = \underbrace{\text{konst}}_{Q^2(0)} + t$$

Zeitabhängige Hamilton - Jacobi

$$H(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f, t) \longrightarrow K(Q^1, \dots, Q^f, P_1, \dots, P_f, t) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0 ,\ \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q,P,t) = Q^\alpha$ also $q^\alpha = q^\alpha(Q,P,t)$ ...