Charakteristisches Polynom

$\mathrm{char}_A(X) := \det(X\cdot I_n - A)$

Prop. $\mathrm{char}_A(X)$ normiert und sein konstanter Koeff: $(-1)^n \det(A)$

Prop $A\sim B \Rightarrow \mathrm{char}_A(X) = \mathrm{char}_A(X)$

Eigenwerte und Eigenvektoren

$\mathrm{Eig}_{\lambda,f} = \mathrm{Kern}(\lambda\cdot \mathrm{Id}_V - f) \subset V$

geom. Mult(λ) = $\dim \mathrm{Eig}_{\lambda,f}$

arith. Vielf(λ) = Vfh λ als Nullstelle

Diagonalisierbarkeit

- $\forall$ geord. B: ${}_BM_B(f)$ diag $\Leftrightarrow b_i$ EV(f)
- f diagbar $\Leftrightarrow \mathrm{char}_f(X)$ zerfällt über K in Linearfaktoren und geom = arith, $\forall\lambda$

Trigonalisierbarkeit

Eine Menge F die durch Inklusion total geordnet ist heisst Fahne

- $f \in$ Endo trigonal.bar (∇) $\Leftrightarrow \exists$ f invariante vollst. Fahne $\Leftrightarrow \mathrm{char}_f(X)$ zerfällt in lin.Fakt.

Nilpotente Endomorphismen

- $f\in$ Endo nilpotent $\Leftrightarrow \mathrm{char}_f(X) = X^{\dim V}$

$\Leftrightarrow \exists\, {}_BM_B(f)$ strikt $\nabla \Leftrightarrow \exists F, U_0=0, U_r=V, f(U_i)\subseteq U_{i-1}$

Minimal Polynom

minimal Polynom φ:

$\varphi(f)=0, \forall\psi$ mit $\psi(f)=0$ gilt $\varphi | \psi \Leftrightarrow$

$\varphi(f)=0, \forall \psi\neq 0: \psi(f)=0$ gilt $\deg\varphi \le \deg\psi$

- $\dim(V)<\infty \Rightarrow \exists$ min.Pol(f).

Cayley-Hamilton: $\mathrm{char}_f(f) = 0$

Blocktrigonalisierung

- f blocktrigo.bar $\Leftrightarrow \exists U \subsetneq V$ f invariant $\Leftrightarrow \mathrm{char}_f(X)$ reduzible
- Begleitmatrix $\varphi = \sum_{i=0}^n a_i X^i$: $\begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{char}_f(X)$ irred. $\Rightarrow \exists\, {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ & \ddots \\ & & A_r\end{pmatrix}$, A_i = Begl.Mat eind.

Hauptraumzerlegung

$\mathrm{char}_f(X) = \prod_{i=1} p_i(X)^{m_i}$

- $\mathrm{Hau}_{p_i}(f) := \mathrm{Kern}(p_i(f)^{m_i}) \leftarrow$ f invariant
- $V = \bigoplus_{i=1} \mathrm{Hau}_{p_i}$ • $f|_{\mathrm{Hau}_{p_i}(f)}$ hat char $= p_i(X)^{m_i}$

Nilpotente Endomorphismen II

- f nilpotent $\Rightarrow \exists$ geord B: ${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} N_{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{j_r}\end{pmatrix}$

Jordansche Normalform

- f trig.bar $\Rightarrow \exists$ JNF: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix}$, Null = dim Kern
- Anzahl $(k\times k)$ J-Blöcke zum EW λ, $k\ge 1$:

$2\,\mathrm{Null}((f-\lambda\cdot \mathrm{id}_V)^k) - \mathrm{Null}((f-\lambda\cdot\mathrm{id}_V)^{k-1}) - \mathrm{Null}((f-\lambda\cdot\mathrm{id}_V)^{k+1})$

- Anzahl J-Blöcke zum EW λ = $\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f)$

---

irred $p(X) \Rightarrow J_{p(X)} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & E_{d_1} & \\ & \ddots & \ddots \\ & & E_{d_1} \\ & & P\end{pmatrix}}_{kd}$, P = Begl. Mat, $E_{d_1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}^{d}$

- Anzahl $kd\times kd$ J-Blöcke zu irred.Pol. grad d:

$\frac{1}{d}(2\,\mathrm{Null}(p(f)^k) - \mathrm{Null}(p(f)^{k-1}) - \mathrm{Null}(p(f)^{k+1}))$

- $A\sim B \Leftrightarrow$ same JNF ($\bullet\ A\sim A^T$)

binomische Formel: $(A+B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^{k-i}\cdot B^i$

$\|(a_{i,j})_{i,j}\| := \sqrt{\sum_{k,l}|a_{kl}|^2}$

$\exp(A) = \sum_{m=0}^\infty \frac{A^m}{m!}$

$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B$, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

$AB=BA \Rightarrow \exp(AB) = \exp(A)+\exp(B)$

Normierte Körper / Vektorräume

Norm:	
$\lvert x\rvert=0 \Leftrightarrow x=0$	$\|v\|=0\Leftrightarrow v=0$
$\lvert x\cdot y\rvert = \lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$	$\|x\cdot v\| = \lvert x\rvert\,\|v\|$
$\lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert+\lvert y\rvert$	$\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$

$\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ äquiv. $\Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R}_{>0}, \forall v: c\cdot\|v\| \le \|v\|' \le c'\|v\|$

- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{\ge 0}, p\ge 1 \Rightarrow \alpha^p+\beta^p \le (\alpha+\beta)^p$
- $0<c\le$, $x\mapsto |x|^c$ ist eine Norm auf K

Darstellungsmatrix ($B=(v_1,\dots,v_n)$ Basis V)

Darstellungsmatrix: $M_B(\beta) := (\beta(v_i,v_j))_{i,j=1,\dots,n}$

- Für $x,y\in\mathbb{R}^n$ setze $v=\sum_i x_iv_i$, $w=\sum_j y_jv_j$
  $\Rightarrow \beta(v,w) = x^TM_B(\beta)y$
- β symm. $\Leftrightarrow M_B(\beta)$ symm.
- $M_{B'}(\beta) = {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)^T\cdot M_B(\beta)\cdot {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)$

Reelle Skalarprodukte

Skalarprodukt: pos. def. symm β

- $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$ (v,w lin.abh. $\Rightarrow$ "=") (C.S)
- $\|v+w\| = \|v\|+\|w\| \Leftrightarrow v=\lambda w$, $\lambda\ge 0$

Winkel $\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$

- $v\perp w \Leftrightarrow \|v+w\|^2 = \|v\|^2+\|w\|^2$ (v orth zu w)

Orthonormalbasen

- geordnete Basis B von V ist eine OrthogonalB. $\Leftrightarrow M_B(\langle\,,\rangle)$ diagonal. (ONB $\Leftrightarrow M_B(\langle\,,\rangle)=I_n$)
- $\{0\}^\perp = \emptyset^\perp = V$, $V^\perp=\{0\}$
- $\forall$ Teilmengen $S\subset T\subset V$ gilt $S^\perp\supset T^\perp$, $S\subset(S^\perp)^\perp$
- $\forall$ UR $U\le V$: $U\cap U^\perp = \{0\}$
- Sei $(b_1,\dots,b_n)$ ONB von $U\le V$, $u\in U$, $v\in V$:
  $u = \sum_{i=1}^n\langle b_i,v\rangle\cdot b_i \Leftrightarrow v-u\in U^\perp \Leftrightarrow \|v-u\|$ ist min.
- Sei $U\subset V$ UR $\Rightarrow V = U\oplus U^\perp$ ($\dim V<n$)
- $U\subset V$ ein UR mit $V=U\oplus U^\perp$:
  ONB U + ONB $U^\perp$ = ONB V, $U=V\Leftrightarrow U^\perp=0$
  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$, $U=(U^\perp)^\perp$

Orthogonalisierung

- $\forall$ lin.unab. Tupel $T=(v_1,\dots,v_n)$ $\exists!$ ONS $(b_1,\dots,b_n)$:
  $\forall j$: $v_j = \sum_{i=1}^j a_{ij}b_i$, mit $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $a_{jj}>0$

GS: $\tilde b_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle b_i,v_n\rangle\cdot b_i$, $b_n := \frac{\tilde b_n}{\|\tilde b_n\|}$

Cholesky: $\forall A$ SPD $\exists! R$, $R_{ii}>0$: $R^TR = A$ Bew

Isomorph. $f: V \xrightarrow{\sim} W$ heisst orth. / isometrie falls $\forall v,v'\in V$: $\langle f(v),f(v')\rangle_W = \langle v,v'\rangle_V$

- Q orth. $\Leftrightarrow$ Spalten sind ONB von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow Q^T=Q^{-1}$
- $O(n)$ ist eine Gruppe begl Mat.mult.
- $O(n)$ kompakte Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$

QR: $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists Q\in O(n)$, R-∇: $A=QR$

---

gilt nicht in $\mathbb{C}$ (da nur Semilin.)

- Die Abb. $\delta: V\to V^\vee := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V,\mathbb{R})$, $v\mapsto\delta(v) := \langle v,\cdot\rangle$ ist ein injektiver Homomorphismus (Isomorphismus $\Leftrightarrow \dim V<\infty$)

orthogonale Komplement von U:
$\{\ell\in V^\vee \mid \forall u\in U \text{ (UR)}: \ell(u)=0\}$ ein UR von $V^\vee$

Adjungierte Abbildungen $\mathbb{C}$

- Es gibt höchstens eine lin.Abb $f^*: W\to V$: $\forall v\in V, \forall w\in W$: $\langle f(v),w\rangle = \langle v,f^*(w)\rangle$ (Adjungierte)

Bsp: adj. Abb zu Inklusion $i_U: U\hookrightarrow V$ ist die orth. Projektion $\pi_U: V\twoheadrightarrow U$

- Sei $\dim V<\infty$ und $(b_i)_{i\le n}$ ONB von V
  $\forall w\in W$: $f^*(w) = \sum_{i=1}^n\langle f(b_i),w\rangle\cdot b_i$
- Sei B geord. ONB von V und B' von W
  $\Rightarrow {}_BM_{B'}(f^*) = {}_{B'}M_B(f)^T = {}_{B'}M_B(f)^*$

Spektralsatz für selbstadjungierte Endos

- Alle EW von reell, symm Mat sind $\in\mathbb{R}$.
- Sei f selbstadjungiert Endo und $\dim V<\infty$
  ① $\forall v$ EV ist $\mathbb{R}v\oplus(\mathbb{R}v)^\perp$ f-invariant
  ② $\dim V>0 \Rightarrow \exists$ Eigenwert in $\mathbb{R}$

Spektralsatz:

Für jeden selbstadj. Endo von V mit $\dim V<\infty$ existiert eine ONB von V aus EV von f.

Hauptachsentransformation 1:

$\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symm. $\exists Q\in O(n)$: Q^TAQ diagonal

Normalform symm. Bilinearformen

Eine symm Bilinearform auf V (reell) heisst:

- nicht-ausgeartet: $\forall v\in V\setminus\{0\}: \exists w\in V: \beta(v,w)\neq 0$
- ausgeartet: $\exists v\in V\setminus\{0\}: \forall w\in V: \beta(v,w)=0$
- indefinit: $\exists v,w\in V: \beta(v,v)>0>\beta(w,w)$
- Sei β symm. Bilinearform. auf V, $\dim V<\infty$
- $\exists$ geord Basis B: $M_B(\beta)$ diagonal mit $1,-1,0$
- Anzahl d_0 0s ist dimKern von $v\mapsto\beta(v,\cdot)$
- Anzahl $d_\pm$ von ±1s ist maximale Dimension von Teilraum $U\le V$ s.d $\pm\beta|_{U\times U}$ pos.def
- Diagonaleinträge unabh. von Basis.

Tupel $(d_+,d_-)/(d_0,d_+,d_-)$ heisst Signatur

Rang von β: d_++d_-	d_+: # pos. EW
Index von β: d_+-d_-	d_-: # neg. EW

- A symm Mat. über K s.d $1+1\neq 0$
  $\Rightarrow \exists U\in GL(n)$: U^TAU diagonal (Sym Gauss)
- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symm: Analog in $\mathbb{C}$:
  A SPD $\Leftrightarrow$ Alle EW>0 $\Leftrightarrow \exists B$ inv. $B^TB=A$
  $\Leftrightarrow \exists\nabla$-$R$ inv.: $A=R^TR \Leftrightarrow \exists C$ inv. symm $C^2=A$
  $\Leftrightarrow \det(A_k)>0$, $A_k = (a_{ij})_{i,j\le k}$ Hauptmink.

Singulärwertzerlegung

SVD: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang$=r$, $\exists Q\in O(m)$, $R\in O(n)$ & $D = \begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{pmatrix}$, $\sigma_1\ge\dots\ge\sigma_r>0$ s.d $A=QDR$

$\sigma_1,\dots,\sigma_r$ heissen Singulärwerte von A und $\sigma_1^2,\dots,\sigma_r^2$ sind die EW$\neq 0$ von A^TA.

Quadratische Formen

Ein Polynom $q(x_1,\dots,x_n) = \alpha + \sum_{1\le i\le n} a_i x_i + \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_ix_j$ mit $\alpha, a_i, a_{ij} \in K$ heisst eine quadratische Form in n Variablen über K. $\alpha = a_i = 0$ so heisst q homogen

- Ist $1+1\neq 0$ in K, so besitzt jedes q(x) über K eindeutige Darstellung $\alpha + a\cdot x + x^T A x$, A symm (q nicht ausgeartet $\iff$ A inv.bar)

Hauptachsentransformation 3:

a) $\forall$ reele q(x) $\exists Q\in O(n), \beta\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^n$ so wie D diagonal: $q(Qy) = \beta + b^Ty + y^TDy$

b) q nicht ausgeartet $\Rightarrow \exists \gamma\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}^n$ s.d. $q(c+Qy) = \gamma + y^TDy$

Die Nullstellenmenge $\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)=0\}$ einer reellen q(x) heisst eine reelle Quadrik

Bsp: in $\mathbb{R}^2$: Ellipse, 2 Geraden, $\mathbb{R}^3$: Ellipsoid, ...

Spektralsatz für normale Endos

f linear und $f^*\circ f = f\circ f^*$ heisst normal

Spektralsatz:

$\forall$ normalen Endos f von V, $\dim V < \infty$

$\exists$ geord. ONB B von V s.d.: ${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r\end{pmatrix}$, $D_k = \begin{cases} a_k, & a_k\in\mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k\end{pmatrix}, & a_k,b_k\in\mathbb{R}\end{cases}$

- $\forall f$ orth. gilt $\det(f) = \pm 1$
- Für jeden orth. endo f $\exists$ geord ONB von V s.d: ${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r\end{pmatrix}$, $D_k = \begin{cases}\pm 1 \\ \begin{pmatrix} a_k & b_k\\ -b_k & a_k\end{pmatrix} & a_k,b_k\in\mathbb{R},\ a_k^2+b_k^2=1\end{cases}$

  gilt $\det(f)=1 \Rightarrow$ alle 1x1 Blöcke $=1$
- Sind alle D_i gleich 1 ausser einem
  - $= -1$ so heisst f eine Spiegelung
  - $= \begin{pmatrix} a_k & b_k\\ -b_k & a_k\end{pmatrix}$ so heisst f eine Drehung um den Winkel $\pm\arg(a_k+ib_k)$
- Jeder orth. Endo von V ist eine Kompos. von Spiegel.. Insb. O(n) erzeugt von Spiegel.
- f orth. Endo mit $\det(f)=1$ heisst speziell orthogonal (SO(n))
- Jede spez. orth. Endo. ist eine Komposition von Dreh.. Insb wir SO(n) von Dreh. erzeugt
- Jedes Element von SO(3) ist eine Drehung
  nicht kommutativ

Satz vom Fussball: In jedem Fussballspiel gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balls, die beim Anstoss zur zweiten Halbzeit dieselbe Lage haben wie beim Anstoss zur Ersten

euklidischer VR	unitärer VR
Bilinearform	Sesquilinearform
Symm. Bilinearform	Hermitesche Form
transponierte Matrix A^T	adjungierte Matrix A^*
orth. Abbildung	unitäre Abbildung

Hermitische Formen

Sesquilinearform: $\gamma: V\times V\to\mathbb{C}$ rechts-(links additiv, rechts homogen, links halbhomo.

hermitische Form: $\gamma(v,w) = \overline{\gamma(w,v)}$

Darstellungsmatrix: $M_B(\gamma) := (\gamma(v_k,v_\ell))_{k,\ell=1..n}$

- $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}\ \exists!\ \gamma: M_B(\gamma) = A$.
- $M_{B'}(\gamma) = {}_BM_{B'}(id_V)^* \cdot M_B(\gamma)\cdot {}_BM_{B'}(id_V)$

Eine hermitsche Form mit $\gamma(v,v) > 0, \forall v\neq 0$ heisst positiv definit. Betrag $\|v\| = \sqrt{\gamma(v,v)}$

Std. Skalarprodukt: $\langle x,y\rangle = \bar x_1 y_1 + \dots + \bar x_n y_n$

ℓ_2-Norm: $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2}$

! (Winkel und $\|v+w\|^2 = \|v\|^2+\|w\|^2 \iff v\perp w$ gelten nicht)

GS: $\forall$ lin.unab. Tupel $T=(v_1,\dots,v_n)$ $\exists!$ ONS B: $\forall 1\le\ell\le n$: $v_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} a_{k\ell} b_k$, $a_{k\ell}\in\mathbb{C}$, $a_{\ell\ell}\in\mathbb{R}^{>0}$

- $\tilde v_n := v_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle b_k, v_n\rangle\cdot b_k$, $b_n = \frac{\tilde v_n}{\|\tilde v_n\|}$
- Jede endl. dim. unitäre VR hat eine ONB.

Cholesky: $\forall$ HPD A $\exists!$ komplexe ∇-Matrix R, mit Diagonaleinträge in $\mathbb{R}^{>0}$: $A = R^*R$

Unitäre Gruppe

- $f: V \xrightarrow{\cong} W$: $\langle f(v),f(v')\rangle = \langle v,v'\rangle$ unitär
- Zwischen bel. VR mit = dim. $<\infty$ $\exists$ Isom
- $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ s.d $L_A: \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ bzgl. Std.Sklp. Isometrie heisst unitär (U(n))
- Q unitär $\iff$ Spalten ONB $\iff Q^* = Q^{-1}$
- U(n) Gruppe bzgl. Matrixmult.
- U(n) kompakte Teilmenge von $Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$

QR: $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}\ \exists Q\in U(n)$ und komplexe R

- $\forall f,g$ linear Abb. unitärer VR gilt: $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$, $(f+g)^* = f^*+g^*$, $(cf)^* = \bar c f^*$

Spektralsatz für selbstadj. Endos

Spektralsatz: (selbstadj. Endos)

Für jeden selbstadj. Endo f von unitär VR

a) Alle EW sind reell (f diagbar)

b) Ist $\dim V<\infty$ so existiert ONB aus EV

Hauptachsentransformation:

$\forall$ hermitische A $\exists Q$ unitär s.d Q^*AQ reell diag

Bsp: $\begin{pmatrix} a & b\\ \bar b & a\end{pmatrix} \to$ EW: $\frac{a+b\pm\sqrt{(a-d)^2+4|b|^2}}{2}$

Singulärwertzerlegung

SVD: $\forall A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ mit Rang $=r$ $\exists Q\in U(m), R\in U(n)$ und $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ & & & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_1\ge\dots\ge\sigma_r>0$: $A = QDR$

Spektralsatz für normale Endos

- Sei f ein normaler Endo von V und $\lambda\in\mathbb{C}$:

a) Der Eigenraum von f zu λ ist gleich dem Eigenraum von f^* zu $\bar\lambda$

b) $\forall$ EV v von f ist $\mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^\perp = V$, f-inv.

c) Eigenräume von versch. EW sind orth. zuein.

Spektralsatz:

$\forall$ Endos f von V unitär, $\dim V<\infty$:

f normal $\iff \exists$ ONB aus EV von f. (f diagbar)

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ kommutiert nicht mit $A^* \Rightarrow L_A$ nicht normal. (Auch nicht diag.bar.

Klassifikation unitärer Endos

- $\forall$ unitäre Endos f eines unit. VR V:

a) Alle EW haben Absolutbetrag 1.

b) Ist $\dim V<\infty$, so $\exists$ ONB aus EV

- $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ gilt: $\exp(A^T) = (\exp A)^T$, $\exp(A^*) = (\exp A)^*$
- $\forall$ hermitische A ist $\exp(iA)$ unitär und jede unitäre Matrix ist in dieser Form darstellbar

Multilineare Abb.

Betrachte K-VR: $V_1,\dots,V_r$ und W. Eine Abb. $\varphi: V_1\times\dots\times V_r \to W$, $(v_1,\dots,v_r) \mapsto \varphi(v_1,\dots,v_r)$, die in jeder Variablen v_i seperat linear ist, heisst multilinear. (Menge: $Mult_K(V_1,\dots,V_r;W)$)

- **Funktorialität:** Lin. Abb. $f_i: V_i'\to V_i$ und $g: W\to W'$ induz. eine lin. Abb.: $Mult_K(V_1,\dots,V_r;W) \to Mult_K(V_1',\dots,V_r';W')$, $\varphi \mapsto g\circ\varphi\circ(f_1\times\dots\times f_r)$.
- Seien B_i, C Basen von V_i, W. Betrachte ein System von Koeff. $\alpha^c_{b_1,\dots,b_r} \in K$, $\forall b_i\in B$ und $c\in C$ s.d $\forall b_i\in B_i$: $|\{c\in C \mid \alpha^c_{b_1,\dots,b_r}\neq 0\}| < \infty \Rightarrow \exists!$ multi.lin. Abb. $\varphi: V_1\times\dots\times V_r\to W$ so dass, $\forall b_i\in B_i$ gilt: $\varphi(b_1,\dots,b_r) = \sum'_{c\in C} \alpha^c_{b_1,\dots,b_r} c$

Umgekehrt hat jede multilin. Abb. $\varphi: V_1\times\dots\times V_r\to W$ eindeutige Koeffs. $\alpha^c_{b_1,\dots,b_r}$.

- Für bel $V_1,\dots,V_r,W$ gilt, mit Konvention: $\infty\cdot 0=0$: $\dim_K Mult_K(V_1,\dots,V_r;W) = \left(\prod_{i=1}^r \dim_K(V_i)\right) \cdot \dim_K(W)$
- Eine multi.lin. Abb $\varphi: V^r \to W$ heisst

  symm.: $\forall v_i\in V, \forall\sigma\in S_r$: $\varphi(v_{\sigma 1},\dots,v_{\sigma r}) = \varphi(v_1,\dots,v_r)$

  alternierend: $\forall v_i\in V$: $(\exists i\neq j: v_i=v_j) \to \varphi(v_1,\dots,v_r) = 0$
- φ symm. $\iff \forall v_i, \forall 2\le i\le r$: $\varphi(v_1,\dots,v_{i-2},v_i,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_r) = \varphi(v_1,\dots,v_r)$
- φ heisst antisymm. wenn gilt:

  $\forall v_i, \forall\sigma\in S_r$: $\varphi(v_{\sigma 1},\dots,v_{\sigma r}) = sgn(\sigma)\cdot\varphi(v_1,\dots,v_r)$
- Ist $1+1\neq 0$: antisymm $\iff$ alternierend
- Ist $1+1=0$: antisymm $\iff$ symmetrisch
- **Funktorialität:** lin. Abb. $f: V\to V'$, $g: W\to W'$ induz. lin. Abb: $Sym^r_K(V,W)\to Sym^r_K(V',W')$, $Alt^r_K(V,W)\to Alt^r_K(V',W')$, $\varphi \mapsto g\circ\varphi\circ(f\times\dots\times f)$
- φ sym. $\iff \forall b_i\in B, \forall c\in C, \forall\sigma\in S_r$: $\alpha^c_{b_{\sigma 1},\dots,b_{\sigma r}} = \alpha^c_{b_1,\dots,b_r}$
- φ alt. $\iff \forall b_i, \forall c$: $\begin{cases} \forall\sigma\in S_r: \alpha^c_{b_{\sigma 1},\dots,b_{\sigma r}} = sgn(\sigma)\,\alpha^c_{b_1,\dots,b_r} \\ (\exists i\neq i': b_i=b_{i'}) \to \alpha^c_{b_1,\dots,b_r} = 0\end{cases}$
- Für $r=2$: $\forall c\in C$ $A_c := (\alpha^c_{b_1,b_2})_{b_1,b_2\in B}$ ist symm. bzw. antisym. mit Diag. Null.
- $\dim_K Sym^r_K(V,W) = \binom{\dim_K(V^\vee)+r-1}{r}\cdot\dim_K(W)$

  $\dim_K Alt^r_K(V,W) = \binom{\dim_K(V^\vee)}{r} \dim_K(W)$

  $\Rightarrow \forall r>\dim_K(V)$ gilt $Alt^r_K(V,W) = 0$

  Für $r=\dim_K(V)$ gilt $\dim_K Alt^r_K(V,K) = 1$
- $\forall$ Endos f eines K-VR V der Dim $=n<\infty$ & $\forall\varphi\in Alt^n_K(V,K)$ gilt: $\varphi\circ(f\times\dots\times f) = \det(f)\cdot\varphi$

$\Rightarrow$ Damit können wir det alternativ, basisfrei konstruieren.

Bsp: k-te Ableitung einer C^k-Funktion $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ist eine symm. mult. lin. Abb. $(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}^m$; ihre Koeff. sind die partiellen Ableitung Ordnung k.

Tensorprodukt

Ein Tensorprodukt von V_1 und V_2 über K besteht aus einem K-VR $\hat{V}$ und einer bilinearen Abb. $\kappa: V_1 \times V_2 \to \hat{V}$ mit der universellen Eigenschaft: $\forall$ K-VR W und jede bilineare Abb. $\varphi: V_1 \times V_2 \to W$ $\exists!$ lin. Abb. $\hat{\varphi}: \hat{V} \to W$ mit $\hat{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, d.h. s.d.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa"'] & W \\ \hat{V} \arrow[ur, dotted, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

- Tensorpr. ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & \hat{V}' \\ & \hat{V} \arrow[u, "/\!/"'] \end{tikzcd}$$

- Ein Tensorprodukt existiert immer

- $(v_1 + v_1') \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2$
  $\lambda v_1 \otimes v_2 = \lambda (v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes \lambda v_2$
  $v_1 \otimes (v_2 + v_2') = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_2'$

Ein Element von $V_1 \otimes V_2$ heisst ein Tensor

Ein Element der Form $v_1 \otimes v_2$ ein reiner Tensor

- B_i Basis V_i. Dann sind $b_1 \otimes b_2$, $\forall (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ versch. und $\{b_1 \otimes b_2 \mid (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2\}$ Basis von $V_1 \otimes_K V_2$
  Insb. gilt $\dim_K(V_1 \otimes_K V_2) = \dim_K(V_1) \cdot \dim_K(V_2)$

- Die reinen Tensoren erzeugen $V_1 \otimes V_2$

- $v_1 \otimes v_2 \neq 0 \iff v_1, v_2 \neq 0$,
  $v_1 \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2' \iff \exists \lambda \in K^*: (\lambda v_1, \lambda^{-1} v_2) = (v_1', v_2')$,
  v_i, v_i' lin. unabh. $\Rightarrow v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2'$ kein reiner Tensor

Bsp: $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $\exists$ natürlicher Isom.: $v \otimes w \mapsto v \cdot w^T$

- $\forall V, W$ $\exists$ natürlicher injektiver Homomorphismus $V^\vee \otimes_K W \to \operatorname{Hom}_K(V, W)$ mit $\ell \otimes w \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot w)$

(Sein Bild ist der UR aller Homo. Ist Isom $\iff V, W$ endl. dim)

Adjunktionsformel: Es existieren eind. Isom.

$$\operatorname{Hom}_K(V_1 \otimes_K V_2, W) \cong \operatorname{Mult}_K(V_1 \times V_2, W) \cong \operatorname{Hom}_K(V_1, \operatorname{Hom}_K(V_2, W))$$
$$f \qquad\qquad \varphi \qquad\qquad \psi$$

mit $f(v_1 \otimes v_2) = \varphi(v_1, v_2) = \psi(v_1)(v_2)$

Funktorialität: Zu jeder $f_i: V_i \to V_i'$ lin. $\exists!$ lin. Abb. $f_1 \otimes f_2: V_1 \otimes_K V_2 \to V_1' \otimes_K V_2'$ mit $v_1 \otimes v_2 \mapsto f_1(v_1) \otimes f(v_2)$

- $\forall$ lin. Abb. $V_i \xrightarrow{f_i} V_i' \xrightarrow{g_i} V_i''$ gilt:
  a) $\mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}$
  b) $f_1 \otimes O_{V_2} = O_{V_1} \otimes f_2 = O_{V_1 \otimes V_2}$
  c) $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$
  d) Ist f_i ein Isomorphismus mit Inversem $g_i \Rightarrow$ $f_1 \otimes f_2$ ein Isom mit Inversem $g_1 \otimes g_2$

Körpererweiterung

Sei K ein Unterkörper von L

- $\forall$ K-VR V $\exists!$ Struktur als L-VR auf $V \otimes_K L$, deren additive Gruppe die von $V \otimes_K L$ und: $\forall x, y \in L$ $\forall v \in V$: $x \cdot (v \otimes y) = v \otimes xy$.

Der L-VR $V_L := V \otimes_K L$ heisst die Basiserweiterung von V bzgl. $K \subset L$

- Für jede Basis B des K-VR V bilden die Elemente $b \otimes 1$ von V_L $\forall b \in B$ eine Basis B_L des L-VR V_L. Insb. $\dim_L(V_L) = \dim_K(V)$

Bsp: $\forall n \geq 0$ $\exists$ natürlicher Isom. von L-VRs $K^n \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L^n$ mit $v \otimes x \mapsto xv$

- Im Fall $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ heisst $V_\mathbb{C}$ die Komplexifizierung
- Der komplex Konjugierte eines $\mathbb{C}$-VR $(W, +, \cdot, O_W)$ ist der VR $\bar{W} = (W, +, \bar{\cdot}, O_W)$, $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \times W \to W$, $(z, w) \mapsto \bar{z} \cdot w$

Bsp: $\forall \mathbb{C}$ Unterraum $W \subseteq \mathbb{C}^n$ $\exists$ nat. Isom. von $\mathbb{C}$ VR $\bar{W} \xrightarrow{\sim} \{\bar{w} \mid w \in W\} \subset \mathbb{C}^n$, $w \mapsto \bar{w}$

- $\forall \mathbb{C}$-VR W gilt $\bar{(\bar{W})} = W$
- Jede Basis von W ist auch eine Basis von $\bar{W}$
- Für jeden W unitär, end. dim $\exists$ nat. Isom. von $\mathbb{C}$-VR $\delta: \bar{W} \xrightarrow{\sim} W^\vee := \operatorname{Hom}_\mathbb{C}(W, \mathbb{C})$, $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$
- Für jeden $\mathbb{C}$-VR W $\exists$ nat. Isom. von $\mathbb{C}$-VR $W \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} W \boxplus \bar{W}$, $w \otimes z \mapsto (z \cdot w, z \bar{\cdot} w)$

Höhere Tensorprodukte

- $\exists$ eindeutige Isom. charakterisiert wie folgt:
  $V_1 \otimes_K K \xrightarrow{\sim} V_1$ mit $v_1 \otimes 1 \mapsto v_1$
  $V_1 \otimes_K V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes_K V_1$ mit $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$
  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ mit $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$

$\Rightarrow$ $\forall$ K-VR W und $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mult. $\exists!$ lin Abb. $\hat{\varphi}: V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r \to W$ mit $\hat{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, d.h.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_r \arrow[rr] \arrow[dr, "\kappa"'] & & W \\ & V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \arrow[ur, dotted, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

- $\dim_K(V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r) = \prod_{i=1}^{r} \dim_K(V_i)$
- $\forall r \in \mathbb{N}$ ist die r-te Tensorpotenz von V definiert durch $V^{\otimes 0} := K$, $V^{\otimes r} := V \otimes_K \ldots \otimes_K V$
- Der Raum $T^{r,s}(V) := V^{\otimes r} \otimes_K (V^\vee)^{\otimes s}$ heisst der Raum der r-fach kovarianten und s-fach kontravarianten Tensoren, Typ (s, r)
- Ist $\dim_K V < \infty$, so liefert jede Basis von V die zugeh. duale Basis und somit eine Basis von $T^{r,s}(V)$. Insb.:
  $$\dim_K T^{r,s}(V) = (\dim_K V)^{r+s}$$
- Je nach Situation kann eine $n \times n$ Matrix einen Tensor vom Typ $(0,2)$ or $(1,1)$ or $(2,0)$ darstellen, für $V = K^n$. Für jeden dieser Typen wird der Basiswechsel mit BWM U durch eine andere Formel gegeben: $\underbrace{U^T A U}_{\text{bil.}}$, $\underbrace{U^{-1} A U}_{\text{endo}}$ bzw. $\underbrace{U^{-1} A (U^T)^{-1}}_{\text{Tensor}}$
- $\forall$ K-VR V $\exists$ nat. Isom. $V^\vee \otimes_K V \xrightarrow{\sim} K$, $\ell \otimes v \mapsto \ell(v)$

Bsp: Jede physikalische Grösse liegt in einem gewissen 1-D $\mathbb{R}$-VR.:

Zeit	T	s
Länge	L	m
Masse	M	kg

Tensorräume:

Flächeninhalt	$L^{\otimes 2}$	m^2
Frequenz	$T^\vee$	$1/s$
Geschwindigkeit	$L \otimes T^\vee$	m/s
Beschleunigung	$L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$	m/s^2
Kraft	$M \otimes L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$	$kg \cdot m/s^2$
Energie	$M \otimes L^{\otimes 2} \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$	$kg\, m^2/s^2$

Symmetrische und alternierende Potenzen

$\forall r \in \mathbb{N}$ besteht eine r-te symm. bzw. alt. Potenz von V über K aus einem K-VR $\hat{V}$ und einer symm. bzw. alt. multilin. Abb. $\kappa: V^r \to \hat{V}$ mit der universellen Eigenschaft:

Für jeden K-VR W und jede symm. bzw. alt. mult. Abb $\varphi: V^r \to W$ $\exists!$ lin. Abbildung $\hat{\varphi}: \hat{V} \to W$ mit $\hat{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, das heisst, s.d.

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa"'] & W \\ \hat{V} \arrow[ur, dotted, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

- Eine symm. bzw. alt. Potenz ist eind. bis auf eind. Isom.
- Eine symm. bzw. alt. Potenz existiert immer.
- $S^r V$ or $S^r_K V$ r-te Symm Potenz
  $V^r \to S^r_K V$, $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \cdots v_r$
- $\Lambda^r V$ or $\Lambda^r_K V$ r-te alt. Potenz
  $V^r \to \Lambda^r_K V$, $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$

$v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$, $v \cdot \lambda w = \lambda (v \cdot w)$, $w \cdot v = v \cdot w$
$v \wedge (w + w') = v \wedge w + v \wedge w'$, $v \wedge \lambda w = \lambda (v \wedge w)$, $v \wedge v = 0$, $w \wedge v = -v \wedge w$

- $V^{\otimes 0} = S^0 V = \Lambda^0 V = K$
- $V^{\otimes 1} = S^1 V = \Lambda^1 V = V$
- Sei B eine Basis von V mit Totalordnung $\preceq$ bzw $\prec$:
  $b_1 \cdots b_r$, $\forall b_i \in B$ mit $b_1 \preceq \ldots \preceq b_r$ Basis von $S^r V$
  $b_1 \wedge \ldots \wedge b_r$, $\forall b_i \in B$ mit $b_1 \prec \ldots \prec b_r$ Basis von $\Lambda^r V$
  Insb: $\dim_K S^r_K V = \binom{\dim_K V + r - 1}{r}$
  $\dim_K \Lambda^r_K V = \binom{\dim_K V}{r}$

$\Rightarrow$ $\forall r > \dim_K V$ gilt $\Lambda^r_K V = 0$
$r = \dim_K V$ dann gilt $\Lambda^r_K V = 1$

Adjunktionsformel: Es exist. eind. Isom.

$\operatorname{Hom}_K(S^r_K V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sym}^r_K(V, W)$, $f \mapsto ((v_1, \ldots, v_r) \mapsto f(v_1 \cdots v_r))$
$\operatorname{Hom}_K(\Lambda^r_K V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^r_K(V, W)$, $f \mapsto ((v_1, \ldots, v_r) \mapsto f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r))$

Funktorialität: Zu jeder lin. Abb. $f: V \to V'$ $\exists$ eind. lin. Abb.:

$S^r f: S^r_K V \to S^r V'$ mit $v_1 \cdots v_r \mapsto f(v_1) \cdots f(v_r)$
$\Lambda^r f: \Lambda^r_K V \to \Lambda^r_K V'$ mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \mapsto f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_r)$

- $\forall$ lin. Abb. $V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{g} V''$ gilt

Bew
  a) $S^r \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{S^r V}$ und $\Lambda^r \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\Lambda^r V}$
  b) ist $f = 0 \Rightarrow S^r f = 0$, $\Lambda^r f = 0$
  c) $S^r g \circ S^r f = S^r (g \circ f)$ und $\Lambda^r g \circ \Lambda^r f = \Lambda^r (g \circ f)$
  d) Ist f ein Isom. mit Inversem g. So ist $S^r f$ bzw. $\Lambda^r f$ ein Isom mit Inversem $S^r g$ bzw $\Lambda^r g$.

- $\forall f$ endo eines K-VR V der dim $n < \infty$ ist $\Lambda^n f: \Lambda^n_K V \to \Lambda^n_K V$ gleich der Multiplikation gleich der Multiplikation mit $\det(f)$.
- $\forall f$ Endo eines K-VR V, $\dim V = n < \infty \Rightarrow$ $\Lambda^n f: \Lambda^n_K V \to \Lambda^n_K V$ gleich Mult. mit $\det(f)$

$\Rightarrow$ Det kann man alternativ und basisfrei konstru.

Tensoralgebra, Symm, äussere Algebra

- Für alle $r, s \geq 0$ existieren eindeutige bilineare Abb.

$\otimes: V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \to V^{\otimes (r+s)}$ mit $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \otimes (v_{r+1} \otimes \ldots \otimes v_{r+s}) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r+s}$

$\cdot: S^r V \times S^s V \to S^{r+s} V$ mit $(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r) \cdot (v_{r+1} \cdot \ldots \cdot v_{r+s}) = v_1 \cdot \ldots \cdot v_{r+s}$

$\wedge: \Lambda^r V \times \Lambda^s V \to \Lambda^{r+s} V$ mit $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) \wedge (v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s}) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+s}$

Tensoralgebra $TV := \boxplus_{r\geq 0} V^{\otimes r}$ $\quad (\xi_r)_{r\geq 0} \otimes (\eta_s)_{s\geq 0} = \left(\sum_{r=0}^{t} \xi_r \otimes \eta_{t-r}\right)_{t\geq 0}$

symm. Algebra $SV := \boxplus_{r\geq 0} S^r V$ $\quad \left(\sum_{r=0}^{t} \xi_r \cdot \eta_{t-r}\right)_{t\geq 0}$

äussere Algebra $\Lambda V := \boxplus_{r\geq 0} \Lambda^r V$ $\quad \left(\sum_{r=0}^{t} \xi_r \wedge \eta_{t-r}\right)_{t\geq 0}$

$\boxplus_{i\in I} V_i := \{(v_i)_{i\in I} \mid \forall i: v_i \in V_i, \text{fast alle } v_i = 0_{V_i}\}$

- Mit der Addition von V und der angegeb. Multpl., sowie dem Einselement von $K = V^{\otimes 0}$ ist dies jew. ein assoz. unitärer graduierter Ring
- Für $\dim V = 0 \Rightarrow V^{\otimes r} = S^r V = \Lambda^r V = 0, \forall r > 0$ $\Rightarrow TV = SV = \Lambda V = K$
- Sei $\dim V = 1$ mit Basis b. $\forall r \geq 0 \Rightarrow \dim V^{\otimes r} = 1$ mit Basis $b^{\otimes r}$ und $\dim S^r V = 1$, b^r. Und es exist. eind. Isom.:
  $K[X] \xrightarrow{\sim} TV \xrightarrow{\sim} SV$, $\sum_{i\geq 0}' a_i X^i \mapsto \sum_{i\geq 0}' a_i b^{\otimes i} \mapsto \sum_{i\geq 0}' a_i b^i$
  bzw. $K \oplus Kb \xrightarrow{\sim} \Lambda V$ mit $b \wedge b = 0$
- a) $V \neq 0 \Rightarrow \dim(TV) = \dim(SV) = \infty$
  b) $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(\Lambda V) = 2^{\dim(V)}$ (sonst $= \infty$)
- a) Der Ring SV ist immer kommutativ
  b) $\dim V \leq 1 \Rightarrow TV$ und ΛV kommutativ
  c) $1+1 = 0$ in $K \Rightarrow \Lambda V$ kommutativ
  d) sonst ΛV bzw TV nicht kommutativ
- $\forall r,s \geq 0$ und alle $\xi \in \Lambda^r V$, $\eta \in \Lambda^s V$ gilt
  $$\eta \wedge \xi = (-1)^{rs}\, \xi \wedge \eta$$
  (für gerades r kommutiert $\Lambda^r V$ mit ganz ΛV)
- Ist $\dim_K(V) < \infty$, so existieren $\forall r \geq 0$ natürliche Isom. $\Lambda^r(V^\vee) \underset{\sim}{\xrightarrow{\varphi_r}} \mathrm{Alt}^r(V,K) \xrightarrow{\sim} (\Lambda^r V)^\vee$

(Der zweite Isom. ist ein Spezialfall der Adjunktionsformel, und der erste ist charakterisiert durch die Formel:
$\varphi_r(\ell_1, \dots, \ell_r)(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \ell_1(v_{\sigma 1}) \cdots \ell_r(v_{\sigma r})$)

- $\forall r,s \geq 0$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^r(V^\vee) \times \Lambda^s(V^\vee) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\wr" ', "\varphi_r \times \varphi_s"] & \Lambda^{r+s}(V^\vee) \arrow[d, "\wr" ', "\varphi_{r+s}"] \\
\mathrm{Alt}^r(V,K) \times \mathrm{Alt}^s(V,K) \arrow[r, "\wedge"] & \mathrm{Alt}^{r+s}(V,K)
\end{tikzcd}$$

, wobei

$(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{r+s}) := \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \varphi(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma r}) \cdot \psi(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)})$

$\sigma \in S_{r+s}$ mit $\sigma 1 < \dots < \sigma r$, $\sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Für jeden K-VR V, $\dim = n < \infty$ induz. das äussere Produkt einen nat. Isom.

$$\Lambda^{n-1} V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, \Lambda^n V), \quad \xi \mapsto (v \mapsto \xi \wedge v)$$

Die Wahl eines Isoms $\Lambda^n V \cong K$ liefert $\Rightarrow$

$$\Lambda^{n-1} V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,K) = V^\vee$$

Sei V eukl. VR $\Rightarrow$ Skalarp. induz $V^\vee \cong V$

$$\Rightarrow \Lambda^{n-1} V \xrightarrow{\sim} V$$

- Für $n = 3 \Rightarrow V \times V \to \Lambda^2 V \xrightarrow{\sim} V$, $V = \mathbb{R}^3$
  $(v,w) \mapsto \langle v, w\rangle \mapsto v \times w$
  mit Isom $= \det: \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ und Std Skp.
  $\Rightarrow$ Vektorprodukt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

Grundeigenschaften

Vektorprod. bilinear & alternierend

a) $\langle u, v \times w\rangle = \langle u \times v, w\rangle = \det(u,v,w)$

b) $u \times (v \times w) = \langle u,w\rangle v - \langle u,v\rangle \cdot w$

c) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$

d) $v \times w = 0 \Leftrightarrow v, w$ lin. abh.

e) $v \times w$ orth zu v, w

f) v, w lin. unabh. $\Rightarrow (v, w, v \times w)$ Rechtssystem
d.h $\det(v, w, v \times w) > 0$

g) $|v \times w|$ ist der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms
also $|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot |\sin\alpha|$, wenn $\langle v,w\rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha$

Bew:

c) $\Rightarrow$ a) : $x^T A x = (Bx)^T (Bx) = \|Bx\|^2 \geq 0$

a) $\Leftrightarrow$ b): A pos.def $\Leftrightarrow Q^T A Q$ pos. def. $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ (Diagonaleinträge)

a) $\Rightarrow$ e) : $Q^T A Q = D$, $C = Q\sqrt{D}Q^T \Rightarrow C^2 = QDQ^T = A$

a) $\Rightarrow$ f): $A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$, $x_k = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\}k \Rightarrow A_k$ pos.def $\Rightarrow A_k \sim D_k$, mit $D_{ii} > 0 \Rightarrow \det(A) > 0$

f) $\Rightarrow$ a) Induktion

A_{n-1} pos.def $\Rightarrow \exists B \in GL(n-1): B^T B = A_{n-1}$, $C := \begin{pmatrix} B^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C^T A C = \begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ w^T & \lambda \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} I_{n-1} & -w \\ & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T C^T A C D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \nu \end{pmatrix}$

$\det(D^T C^T A C D) = \nu = \underbrace{\det(D)^2}_{=1} \underbrace{\det(C)^2}_{>0} \underbrace{\det(A)}_{>0} \Rightarrow E$ pos.def $\Rightarrow A$ pos.def

Bew: a)

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "(\mathrm{id}_V)^r"] \arrow[dr, "\kappa" '] & V^r \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, phantom, "///"] & S^r V \\
& S^r V \arrow[ur, shift left, "\mathrm{id}_{S^r V}"] \arrow[ur, shift right, "S^r \mathrm{id}_V" '] &
\end{tikzcd}$$

Kommutativ von $S^r\mathrm{id}_V$, aber $\mathrm{id}_{S^r V}$ macht das Diag. schon kommutativ. $\Rightarrow S^r \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{S^r V}$ (Eind. der UE)

Für $\Lambda^r V$ analog.

b)

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\kappa" '] & V^r \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, phantom, "///"] & \Lambda^r V' \\
& \Lambda^r V \arrow[ur, dashed, shift left, "0"] \arrow[ur, dashed, shift right, "\Lambda^r 0" '] &
\end{tikzcd}$$

Eind. der UE $\Rightarrow 0 = \Lambda^r 0$

c)

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "f^r"] \arrow[d, "\kappa" '] \arrow[dr, phantom, "///"] & V'^r \arrow[r, "g^r"] \arrow[d, "\kappa'"] \arrow[dr, phantom, "///"] & V''^r \arrow[d, "\kappa''"] \\
S^r V \arrow[r, "S^r f" '] \arrow[rr, bend right, "\text{(lin) } S^r g \circ S^r f" '] \arrow[rr, bend right=60, "S^r(g \circ f)" '] & S^r V' \arrow[r, "S^r g" '] & S^r V''
\end{tikzcd}$$

Eind. UE

$\Rightarrow S^r(g \circ f) = S^r g \circ S^r f$

lin Abb $f: V \to V$ entspricht unter
$\delta: V \to V^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$, $v \mapsto \langle v, \cdot\rangle$
nicht ihrer dualen Abb. $f^\vee: V^\vee \to V^\vee$
$f = \delta^{-1} \circ f^\vee \circ \delta \Leftrightarrow \delta \circ f = f^\vee \circ \delta \Leftrightarrow \delta(f(v)) = f^\vee(\underbrace{\delta(v)}_{\delta(v)\circ f})$, $\forall v$
$\Leftrightarrow \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$. Diese Eig. doesn't always hold

lineare DGL: $y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$

$\Rightarrow v' = Av$, $A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y^{(n-1)} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^T$ Begleitmatrix $\Rightarrow$ char = min $\Rightarrow$ 1 J-B zu λ_i

$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r\end{pmatrix} U^{-1}$

$\Rightarrow v(x) = U \cdot \operatorname{diag}(e(J_1 x), \dots, e(J_k x)) U^{-1} v_0$,

$e(J_j x) = e(\lambda_j x \cdot I_{n_j}) \cdot e(x N_{n_j}) = e^{\lambda_j x} \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \frac{x^\ell}{\ell!} N_{n_j}^\ell$

$\Rightarrow y(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{\ell=0}^{n_j-1} c_{j,\ell} \cdot x^\ell e^{\lambda_j x}$

links-nichtausgeartet $\Leftrightarrow$ rechts-nichtausgeartet

$k: V \to V^*, v \mapsto b(v,\cdot)$ linear. $\Rightarrow$: Kern(k) $= 0$. Wegen $\dim V < \infty \Rightarrow \dim V = \dim V^*$, da k inj. $\Rightarrow$ k Isom.

Sei $w \neq 0 \in V$, $\ell \in V^*$, $\ell(w) \neq 0 \Rightarrow \exists v: \ell = b(v,\cdot) \Rightarrow b(v,w) \neq 0$

Symm. komplexe Matrix mit pos. def Realteil:

$(A+iB) = (R^T R + iB) = (I_n + i \underbrace{R^{-T} B R^{-1}}_{\text{Sym., Reell}})$

$\Rightarrow \exists Q \in O(n): D = Q R^{-T} B R^{-1} Q^T$, diagonal

$\Rightarrow (A+iB) = Q^T(I_n + D)Q$

$\Lambda^r f$ = Multiplikation mit det(f):

Bew: $t_1, \dots, t_r$ Basis $V \Rightarrow t_1 \wedge \dots \wedge t_r$ Basis von $\Lambda^r V$

$f(t_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} t_i \Rightarrow M_B(f) = (a_{ij})_{ij}$

$\Rightarrow \Lambda^r f(t_1 \wedge \dots \wedge t_r) = f(t_1) \wedge \dots \wedge f(t_r)$

$= \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^r (a_{i_1,1} \cdot t_{i_1}) \wedge \dots \wedge (a_{i_r,r} \cdot t_{i_r}) = \sum_{i_1,\dots,i_r} \prod_{j=1}^r (a_{i_j,j}) \cdot \overbrace{t_{i_1} \wedge \dots \wedge t_{i_r}}^{= 0, \text{ wenn } i: j \mapsto i_j \text{ nicht inj.}}$

$= \sum_{\sigma \in S_r} \left(\prod_{j=1}^r a_{\sigma_j, j}\right) \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot t_1 \wedge \dots \wedge t_r = \det_B M_B(f) \cdot t_1 \wedge \dots \wedge t_r$ □

Bew. Cauchy Schwarz: $|\langle v,w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$

$v=0$ klar. $v \neq 0 \Rightarrow \lambda: \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|_2^2}$

$0 \le \|w - \lambda v\|^2 = \|w\|_2^2 - \langle w, \lambda v\rangle - \langle \lambda v, w\rangle + \|\lambda v\|_2^2$

$= \|w\|_2^2 \underbrace{- \bar\lambda \langle v,w\rangle - \lambda \overline{\langle v,w\rangle}}_{-2\frac{\overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle}{\|v\|_2^2}} + \underbrace{\bar\lambda\lambda\|v\|_2^2}_{\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|_2^4}} \Rightarrow$ Aussage.

Spektralsatz für normale Endo

b) $\Rightarrow$ a): ${}_B M_B(f)$ = diag. $\Rightarrow$ f normal

a) $\Rightarrow$ b): Induktionsbeweis.

Jede Q unitär hat eine Form exp(iB)

Q unitär $\Rightarrow \exists U$ unitär: $U^{-1}QU = \begin{pmatrix}\lambda_1 && \\ & \ddots & \\ && \lambda_n\end{pmatrix}$

$\lambda_i = e^{i\mu_i} \Rightarrow B = U \begin{pmatrix}\mu_1 && \\ &\ddots& \\ && \mu_n\end{pmatrix} U^{-1} \Rightarrow$ B herm.

$\Rightarrow U^{-1}\exp(iB)U = \dots = U^{-1}QU \Rightarrow \exp(iB) = Q$

Norm regelm. 6-eck: (Ident. $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$)

$\zeta := e^{2\pi i/3}$, $z \mapsto \sum_{i=1}^3 |\mathrm{Re}(\zeta^i z)|$

det exp(A) = exp Spur(A)

$J = S^{-1}AS$. $\Rightarrow \det\exp(A) = \prod_{i=1}^k \det\exp(J_i)$

$\exp\operatorname{Spur}(A) = \exp \sum_{i=1}^k \operatorname{Spur}(J_i) = \prod_{i=1}^k \exp\operatorname{Spur} J_i$

Deshalb schauen wir nur J_i an

, $\exp(J) = \begin{pmatrix} e(\lambda) & * \\ 0 & e(\lambda)\end{pmatrix} \Rightarrow \det\exp(J) = \exp(n\lambda) = \exp\operatorname{Spur} J$

$\mathbb{R}^3 \supseteq U = \operatorname{span}(v_1, v_2)$

Darstellungsmatrix der orth. Proj:

$v \mapsto \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2$

$\Rightarrow {}_E M_W = (\langle e_j, w_i\rangle)_{i \le 2, j \le 3}$

$\delta: V \to V^\vee, v \mapsto \langle v, \cdot\rangle$

z: $\exists! \langle\cdot,\cdot\rangle^\vee$ auf $V^\vee$ s.d δ Isometrie:

δ Isometrie $\Leftrightarrow \forall v,w: \langle \delta(v), \delta(w)\rangle^\vee = \langle v,w\rangle$

da δ bij $\exists! \langle\cdot,\cdot\rangle^\vee$. $\langle \lambda, \mu\rangle^\vee := \langle \delta^{-1}(\lambda), \delta^{-1}(\mu)\rangle$

z: Gib die Darstellungsmatrix (DM) von $\langle\cdot,\cdot\rangle^\vee$ bezügl. $B^\vee$ in Termen der DM von $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Sei $b_1,\dots,b_n$ eine geordnete Basis von V

$\Rightarrow \ell(b_1), \dots, \ell(b_n)$ duale Basis, $\ell(b_i): \begin{matrix} B \to \mathbb{R} \\ b_j \mapsto \delta_{ij}\end{matrix}$

$\Rightarrow \left(\delta(b_i) - \sum_{j=1}^n \langle b_j, b_i\rangle \delta(b_j)\right)(b_k) = \delta(b_i)(b_k) - \sum \langle b_j, b_i\rangle \delta(b_j)(b_k)$

$\left(\sum_{j=1}^n \langle b_j, b_i\rangle \ell(b_j)\right)(b_k) = \sum_{j=1}^n \langle b_i, b_j\rangle \delta_{jk} = \langle b_i, b_k\rangle = \delta(b_i)(b_k)$, $\forall k \le n$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \langle b_j, b_i\rangle \ell(b_j) = \delta(b_i) \Rightarrow \delta(b_i)$ Basis mit BM: $A = {}_{B^\vee}M_{\delta(B)}$

A, L symm. $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ und L SPD.

z: $\exists c_0 \in \mathbb{R}: A + cL$ pos. def, $\forall c > c_0$

$n=0$ klar, $n>0$: $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$

kompakt $\neq \emptyset$ und $v \mapsto \langle Av, v\rangle, \langle Lv, v\rangle$ stetig

$\Rightarrow$ Sie nehmen ein Minimum auf S^{n-1}: m_A, m_L

L SPD $\Rightarrow m_L > 0$. $c > c_0 := \frac{|m_A|}{m_L} \Rightarrow \forall v \in S^{n-1}$ Aussage $\left(\forall v \neq 0 \in U \Rightarrow \frac{v}{\|v\|} \in S^{n-1}\right)$

$\forall f$ sesqui. $\exists$ eind. lin. Abb. $T_f: V \to V$
mit: $\forall x,y \in V$: $f(x,y) = \langle T_f x, y\rangle$

· $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geord. ONB. von V

falls T_f existiert $\Rightarrow M_B(T_f) = (\langle v_i, T_f v_j\rangle)_{1\le i,j\le n} = (\overline{\langle T_f v_j, v_i\rangle})_{ij} = (\overline{f(v_j, v_i)})_{ij} \Rightarrow$ eind.

· $M_B(T_f) = (\overline{f(v_j, v_i)})_{ij} \Rightarrow \langle T_f x, y\rangle = \langle \sum_i a_i \sum_j \overline{f(v_i, v_j)} v_j, \sum_k b_k v_k\rangle$

$= \sum_{i,j,k} \bar a_i b_k f(v_i, v_j)\delta_{jk} = f(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j) = f(x,y)$

$\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle T(x), T(y)\rangle = 0$

z: $\exists S$ unitär und $c \in \mathbb{C}$: $T = cS$

$f := T^*T \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), y\rangle = 0 \Rightarrow f(x) \in (\langle x\rangle^\perp)^\perp = \langle x\rangle$

, $f(x) = \lambda_x x$, $f(y) = \lambda_y y$, x,y lin. unabh. $\lambda_x x + \lambda_y y = f(x) + f(y) = f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$

$\lambda_y = \lambda_x = \lambda_{x+y} \Rightarrow f = b \cdot \mathrm{id}_V$. $\langle f(v), v\rangle \ge 0 \Rightarrow b \ge 0$. $c := \sqrt b$, $S = T/c$. $\Rightarrow$ S unitär

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$f: \hat V \to \hat W$, ${}_{B'}M_B(f) = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n} \Rightarrow \forall_j\ f(b_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} b'_k$

reduzible: q lässt sich als $p_1 \cdot p_2$ schreiben

zerfällt in lin. Faktoren: $q = (x-a)^{n_1} \cdots (x-b)^{n_k}$

geordnet

define $f_i: B^\ell \to \{0,1\}$, $b_j \mapsto \delta_{ij}$

define $\langle\cdot,\cdot\rangle: B \times B \to \{0,1\}$, $(b_i, b_j) \mapsto f_i(b_j)$

extend linear

JNF: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. calculate $\text{char}_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$
2. Zu jedem EW bestimme $\text{Ker}((A-\lambda_i)), \dots, \text{Ker}((A-\lambda_i)^c)$ bis sich der Kern nicht mehr ändert (c exp. im min. P)
3. Bestimme Anzahl/Grössen der Jordanblöcke zu jedem EW.
4. Beginnend mit dem grössten Block der Länge c wähle $v_1 \in \text{Ker}((A-\lambda_i I_n)^c) \setminus \text{Ker}((A-\lambda I_n)^{c-1})$ bilde v_1 unter $(A-\lambda_i I_n)$ ab, bis Länge c erreicht $\to v_1, (A-\lambda_i I_n)v_1, \dots, (A-\lambda_i I_n)^{c-1}v_1$
5. Verfahre gleich mit den weiteren Blöcken wobei der Startvektor zu den bereits gefundenen lin. unabh. sein soll.
6. Setze $B' := ((A-\lambda_1)^{d_1}v_1, \dots, v_1, (A-\lambda_1)^{d_2}v_2, \dots, v_2, \dots, v_k)$ $k = \sum_{i=1}^{r} \dim \text{Eig}_{\lambda_i}$ $\to B' = {}_B M_{B'}(\text{id}_V)$ und $M_{B'}(f)$ ist JNF

- alg. Vfh m_i = Länge des "Jordanblocks" zu λ_i
- $\dim E_{\lambda_i}$ = Anzahl der Kästchen im Block zu λ_i
- c_i Exponent zu λ_i im min. Pol
  $\Rightarrow c_i$ = Länge des grössten Kästchen

JNF: allg.

1. $\text{char}_f(X) = \prod p_i(X)^{m_i}$
2. Finde zu jedem p_i die Anzahl der zugehörigen Blöcke (kd x kd)
3. Finde $v_\ell \in K^n \setminus \text{Ker}(p_i(f))$ und wende f auf v_ℓ an bis die Länge des längsten Blocks erreicht $f^{k_1 d}(v_\ell), \dots, f(v_\ell), v_\ell$
4. Wende $p_i(f)$ auf v_ℓ an und erhalte $f^{k_2 d}(v_m), \dots, f(v_m), v_m$
5. Verfahre weiter so um die restlichen Blöcke zu erhalten. (i.e. $(p_i(f))^2(v_\ell)$ um Startvektor zu erhalten etc.) $\to f^{k_2 d}(v_m), \dots, f(v_m), v_m, f^{k_1 d}(v_\ell), \dots, f(v_\ell), v_\ell)$ Basis von $\text{Hau}_{p_i}(f)$
6. Finde Basis für alle $\text{Hau}_{p_i}(f) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{r} \text{Hau}_{p_i}(f)$

SVD: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $n \le m$

1. $B = A^T A$
2. Berechne EW von B s.d. $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_k > 0$
3. Bilde ONB $(v_1, \dots, v_n)$. Dabei v_i EV zu EW $\lambda_i \Rightarrow V := (v_1 \cdots v_n)$
4. $S_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$, $\forall i \le r$, rest $= 0 \Rightarrow S := (S_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
5. $u_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$, $\forall i \le k$. Ergänze zu ONB von $\mathbb{R}^m \Rightarrow U := (u_1 \cdots u_m)$
6. $A = USV^T$ (nicht eind.)

Quadratwurzel: $A = B^2$, A SPD

1. A als $Q^T D Q$ schreiben
   EV $v_1, \dots, v_n$ zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $Q = (v_1, \dots, v_n)$
2. $B = Q^T \sqrt{D} Q$ (eind.) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Symm. Gauss

ist $a_{11} \neq 0$: $S := \begin{pmatrix} 1 & -v/a_{11} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$, $v = (a_{12}, \dots, a_{1n})$

$a_{11} = 0 \neq a_{ii}$ für ein $i > 1$: S = Perm. Vertausch. von 1 & i

$a_{11} = a_{ii} = 0 \neq a_{1i}$: $S := I_n + E_{i1}$ in $\mathbb{C}$: $S = I_n + cE_{i1}, c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow S^T A S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, B symm.

z.B $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{21} \\ a_{12} & 2a_{12} \end{pmatrix}$$

z.B $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

QR: $A = QR$, $A \in Gl(n)$

1. Gramschmidt auf die Spalten von A
   $b_1 = a_1 v_1$, $b_2 = a_1' v_1 + a_2' v_2$, ...
2. $R^{-1} := \begin{pmatrix} a_1 & a_1' & \cdots \\ & a_2' & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ 3. or do $R = Q^T A$

Cholesky: ($A = R^T R$, SPD) (eind.)

- Symmetrischer Gauss.
- $\langle x, y \rangle := x^T A y$
  $B = (b_1, \dots, b_n)$ ONB (G.S) bzg $\langle\cdot,\cdot\rangle$
  $A = M_\xi(\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $I_n = M_B(\langle\cdot,\cdot\rangle)$
  $= {}_\xi M_B(\text{id}_V)^T M_\xi(\langle\cdot,\cdot\rangle) \cdot {}_\xi M_B(\text{id}_V) = U^T A U$,
  $U = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow U^{T^{-1}} U^{-1} = R^T R = A$
- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix} = R \Rightarrow R^T R = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+d^2 & bc+de \\ ac & bc+de & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix}$

Hf endo eines n-dim VR, dessen char.Poly. in lin. Faktoren zerfällt

$Hau_{X-\lambda}(f) = Ker((f-\lambda id_V)^n)$

f Endo, min.Pol zerfällt. Nur aus Kenntnis der Eigenräume

nur die # Jordanblöcke bestimmen

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit JNF J:

$A+I_n$ hat JNF $J+I_n$

Für $n>m\geq 1$ $\exists$ quadratische Matrix

mit char: X^m+X^n, min X^m char X^n

minPol: $X^m(X^n-1)$

$\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) \longmapsto \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

ist eine nicht-symm. Bilinearform

$S,T \subset V$

$S\subset T^\perp \Leftrightarrow T\subset S^\perp \Leftrightarrow S\perp T \not\Leftrightarrow \langle S\rangle \cap \langle T\rangle = \{0\}$

Unterraum $Mat_{n\times n}\mathbb{C}$

Symm. Matrizen

V eukl. VR dim = 2019. Wie viele EV:

mind 1. (normal $\Rightarrow$ $\exists$Blockdiag. form $(1\times 1, 2\times 2)$

Weil 2019 ungerade, muss es ein 1-Block dabei sein,

welcher einem EV entspricht. Take 1 Block, looks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$.)

Im Allg. diagbar:

selbstadj. in eukl. VR, normale or unitäre in unitär VR

nicht diagbar: normale Endo in eukl. VR

universelle Eigenschaft einer Basis S von V

Für jeden K-VR W besitzt jede Abb. $S\to W$ eine

eindeutige Fortsetzung zu einer lin. Abb. $V\to W$

V,W K-VR

V,W endl $\Rightarrow V\otimes W$ endl, $V,W\neq 0 \Rightarrow V\otimes W\neq 0$

$V\otimes W\neq 0 \Rightarrow V$ und $W\neq 0$. $V\otimes W$ endl $\not\Rightarrow V,W$ endl.

V,W VR

V,W endl $\Rightarrow V^\vee\otimes W \cong Hom(V,W)$

V,W bel $\Rightarrow V\otimes W \cong W\otimes V$

V K-VR. Wann $\exists w,v\in V: v\wedge w \neq w\wedge v$

$1+1\neq 0$ und $\dim V>1$.

f,g,f^*,g^* kommutieren

$fg=gf \Rightarrow g^*f^*=f^*g^*$, f,g diagbar. und kommutieren

$\Rightarrow f,g$ simultan diagbar. $\Rightarrow \exists B$ s.d f,g diagonal

EV von f auch von $f^* \Rightarrow {}_BM_B(f^*)$ und ${}_BM_B(g)$ diag. $\Rightarrow$ Sie kommutieren.

f diagbar aber nicht normal $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i\end{pmatrix}$ this is OBdA trivial

f^2 normal f nicht $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

f und g sind normal, aber f+g nicht $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Jede f normal ist lin.komb von kom. selbstadj.

$g:=\frac{1}{2}(f+f^*)$, $h:=\frac{1}{2i}(f-f^*) \Rightarrow g^*=g, h^*=h, gh=\ldots=hg, g+ih=\ldots=f$

Bestimme die Drehachse

Nach Drehachse ist Eigenraum von A zu EW 1. ${}_BM_B(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

$Spur({}_BM_B(A)) = Spur(A)$.

Finde eine Drehungen T von $\mathbb{R}^3$, $T(E_1)=E_2$

use GS on E_1 $(v_1,\ldots,v_3)$, E_2 $(w_1,\ldots,w_3)$ $\Rightarrow M_0:=(w_1w_2w_3)\cdot(v_1v_2v_3)^T$

orth. mit $\det(M_0)=1$. $T_0:=L_{M_0}$ □

$f:V\to V'$ lin. f inj $\Leftrightarrow \forall W$. $Hom_K(W,V)\to Hom_K(W,V')$, $g\mapsto f\circ g$ inj.

- f inj: $g_1,g_2\in Hom(W,V)$, $f\circ g_1=f\circ g_2 \Rightarrow\ldots\Rightarrow g_1=g_2 \Rightarrow g\mapsto f\circ g$ inj.
- $Hom(W,V)\to Hom(W,V')$ inj.: $\forall x\in Ker(f)$, $W:=K$, $g_1:W\to V, 1\mapsto x$ lin

und $g_2:W\to V, 1\mapsto 0$ lin. $\Rightarrow f\circ g_1=0=f\circ g_2$. Aus inj. von $Hom(W,V)\to Hom(W,V')$

$\Rightarrow g_1=g_2 \Rightarrow x=g_1(1)=g_2(1)=0$. $\Rightarrow Ker(f)=0$. f inj.

f surj. $\Leftrightarrow \forall W$, $Hom_K(V',W)\to Hom_K(V,W)$, $g\mapsto g\circ f$ inj. ⊛

f surj.: Sei W bel. VR. $g_1,g_2\in Hom_K(V',W)$ mit $g_1\circ f=g_2\circ f$.

$\forall y\in V'$ $\exists$ (wegen surj. von f) ein $x\in V$ mit $f(x)=y \Rightarrow g_1\circ f(x)=g_2\circ f(x)$ also

$g_1(y)=g_2(y)$. Da y bel. war $\Rightarrow g_1=g_2 \Rightarrow$ ⊛ inj.

f nicht surj: $Bild(f)\subsetneq V' \Rightarrow \exists\lambda:V'\to K$ mit $Bild(f)\subset Ker(\lambda)$, $\lambda\neq 0$

$\Rightarrow \lambda\circ f(v)=0, \forall v\in V \Rightarrow \lambda\circ f=0$, da $\lambda\neq 0 \Rightarrow Hom(V',W)\to Hom(V,W)$ nicht inj.

$Ker(f)$ is the only UR $U\subset V$ mit: $\forall W, \forall g:W\to V$: $f\circ g=0 \Leftrightarrow Bild(g)\subset U$

· Sei V bel. VR. $g:W\to V$ ein Homo. Falls $Bild(g)\subset Ker(f) \Rightarrow f(g(w))=0$

$\Rightarrow f\circ g=0$. Falls $f\circ g=0 \Rightarrow \forall v\in Bild(g)\ \exists w\in W: g(w)=v \Rightarrow f(g(w))=0$

$\Rightarrow g(w)\in Ker(f) \Rightarrow v\in Ker(f) \Rightarrow Bild(g)\subset Ker(f)$.

· Ang U_1,U_2 haben die Eig. Sei $\iota_2:U_2\to V$ die Inklusion. Es gilt $Bild(\iota_2)=U_2\subset U_2$

Wegen Eig. von $U_2 \Rightarrow f\circ\iota_2=0$. Eig. von U_1 angewendet auf ι_2 somit $U_2\subset U_1$

Umgekehrt erhält man $U_1\subset U_2$ also $U_1=U_2$.

Multilinearität zeigen

$\varepsilon: V_i \longrightarrow V_1\times\ldots\times V_r$, $v\longmapsto(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_r)$

Def $\Rightarrow \varphi$ Mult $\Leftrightarrow \forall i, v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_r$ $\varphi\circ\varepsilon:V_i\to W$ linear ist.

Zeige, dass die UE. gilt für den K-VR $K^{(I)}:=\{(x_i)_{i\in I}\in K^I \mid x_i=0, \text{ für fast alle } i\}$

mit der Abb. $\iota_I: I\to K^{(I)}, i\mapsto(\delta_{ij})_{j\in I}$

Man überprüft zuerst $\{\iota_I(x)\mid x\in I\}$ eine Basis von $K^{(I)}$.

Eind.: Ang $\exists$ $\bar\varphi_1,\bar\varphi_2:K^{(I)}\xrightarrow{\text{lin.}}V$, s.d
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_I"'] & V \\ K^{(I)} \arrow[ur, "\bar\varphi_i"'] & \end{tikzcd}$$
kommutiert. $(i=1,2) \Rightarrow \forall x\in I: \bar\varphi_1(\iota(x))=\bar\varphi_2(\iota(x))$

da $\bar\varphi_1,\bar\varphi_2$ auf der Basis einstimmen $\Rightarrow \bar\varphi_1=\bar\varphi_2$

Existenz: $\varphi: I\to V$ eine Abb. $\bar\varphi:K^{(I)}\to V$, $\bar\varphi(\iota(x))=\varphi(x)$, $\forall x\in I$.

$V_1 \otimes V_2$ wird von reinen Tensoren $v_1 \otimes v_2$ erzeugt.

Sei $\kappa : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ die bilin. Abb.
die zum Tensorprodukt gehört. T UR von $V_1 \otimes V_2$ s.d. $\langle \mathrm{Bild}(\kappa) \rangle = T$
κ faktorisiert $\varphi : V_1 \times V_2 \to T$. Nach UE $\exists$ lin Abb $\bar{\varphi} : V_1 \otimes V_2 \to T$, $\varphi = \bar{\varphi} \circ \kappa$.
durch Komposition mit der Inklusion $\iota : T \hookrightarrow V_1 \otimes V_2 \Rightarrow \iota \circ \bar{\varphi} : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$:
$\iota \circ \bar{\varphi} \circ \kappa = \iota \circ \varphi = \kappa = id_{V_1 \otimes V_2} \circ \kappa$. Eind. UE $\Rightarrow \iota \circ \bar{\varphi} = id_{V_1 \otimes V_2} \Rightarrow \iota$ surj $\Rightarrow T = V_1 \otimes V_2$.

Der Tensor $v = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b_i'$ lässt sich nicht
als Summe von $n-1$ reinen Tensoren schreiben
Aus $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i$, $v_i \in V_1, w_i \in V_2$. Wegen Dim.
$\exists\, \ell \neq 0 : V_2 \to K$ mit $\ell(w_i) = 0, \forall i \leq n-1. \Rightarrow id_{V_1} \otimes \ell : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes K$:
$\sum_{i=1}^{n} \ell(b_i') \cdot (b_i \otimes 1) = \sum b_i \otimes \ell(b_i') = (id_{V_1} \otimes \ell)(v) = \sum v_i \otimes \ell(w_i) = 0$.
Da $b_i \otimes 1$ Basis von $V_1 \otimes K$ bilden $\Rightarrow \ell(b_i) = 0, \forall i \Rightarrow \ell = 0$ ↯.

$f \otimes id_L : V_L \to V_L'$ ist L-lin.
$f \otimes id_L$ K lin. also additiv. $\forall v \in V, x, y \in L$:
$(f \otimes id_V)(x \cdot (v \otimes y)) = (f \otimes id_L)(v \otimes xy) = f(v) \otimes xy = x \cdot (f(v) \otimes y) = x \cdot (f \otimes id_L)(v \otimes y)$
Da jedes Element $\tilde{v} \in V \otimes_K L$ eine Summe von Elementen $v \otimes y$ ist
$\Rightarrow (f \otimes id_L)(x \cdot \tilde{v}) = x \cdot (f \otimes id_L)(\tilde{v}), \forall x, y \in L \Rightarrow f \otimes id_L$ lin.

$\mathrm{Rang}_L(f \otimes id_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$
$\mathrm{Rang}_L(f \otimes id_L) = \dim_L(\mathrm{Bild}(f \otimes id_L)) = \dim_L(\mathrm{Bild}(f) \otimes_K L) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f))$

Jeder unitärer Endo von V ist orth Endo von $V_{\mathbb{R}}$
Für f unitärer Endo : $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \Rightarrow \mathrm{Re}\langle f(v), f(w) \rangle$
$= \mathrm{Re}\langle v, w \rangle, \forall v, w \in V$ also f orth. bzgl. $\mathrm{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$
$\ldots (\mathrm{Re}\langle b, b' \rangle = \delta_{bb'}, \mathrm{Re}\langle b, ib' \rangle = \mathrm{Re}(i \cdot \delta_{b,b'}) \ldots)$

${}_{B'}M_B(id) = (m_{ij})_{i,j}$, $b_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} b_k'$