Agenda

1) THEORIE
2) 9.1 / 8.4
3) NEWTON

THEORIE:

Ziel: Genauigkeit mit wenig Rechenaufwand.

Satz II.3: Falls $f(t,y)$ und $\phi(t,y,h)$ Lipschitz-stetig sind (in y), dann gilt für ESV:

$$E := \max_{j=0,\dots,N} \|y(t_j) - y_j\| \leq e^{L(t_N - t_0)} \left(\|y(t_0) - y_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|e_j\| \right)$$

Wir wollen "$E \overset{!}{\leq} TOL$"

L-Konstante von ϕ

Also machen wir $E \overset{!}{\leq} e^{L(t_N - t_0)} \left(\underbrace{\cancel{\|y(t_0) - y_0\|}}_{\text{w.l.o.g}} + \sum_{j=1}^{N} \|e_j\| \right)$

Idee (not too good): ignoriere $e^{L(t_N - t_0)}$

Also: $\boxed{E \leq \sum_{j=1}^{N} \|e_j\|} \overset{!}{<} TOL$

N ist apriori unbekannt!

$\hookrightarrow \sum \|e_j\| \leq N \cdot tol < TOL \implies tol \approx \frac{TOL}{N}$

$\|e_j\| \leq tol$

Das genügt nicht. Wir wollen bessere Toleranzen: tol_j

Fall: Äquidistante $h = \frac{T - t_0}{N} \longleftrightarrow N = \frac{T - t_0}{h}$, da jetzt $N \cdot tol \approx TOL \rightarrow \frac{T - t_0}{h_j} tol_j \approx N$

$\longleftrightarrow tol_j \approx h_j \frac{TOL}{T - t_0}$

Aber wir haben exponential term ignoriert. n̈

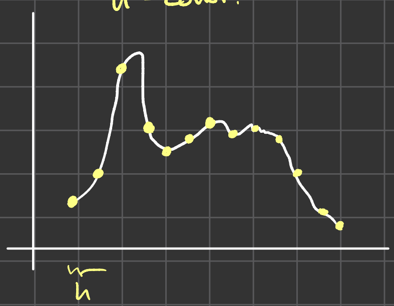
Am Ende kriegt man folgende Toleranzkriterien

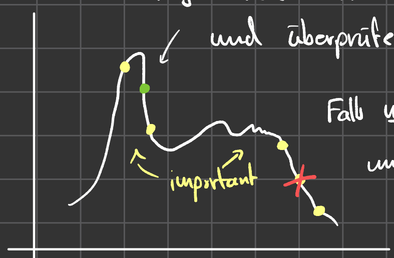
1) $\|e_j\| \le atol$ (abs. toleranz)

2) $\|e_j\| \le \|y_{j-1}\| \cdot rtol$ (relative)

3) $\|e_j\| \le atol + \|y_{j-1}\| rtol$ (abs + rel.)

<u>Intuition</u>





Füge einen halbschnitt und überprüfe ob signifikant Änderung

Falls nicht, überprüfe Doppel-step und überprüfe Änderung.

<u>Rem:</u> Man kann jetzt das weitermachen bis die step-sizes nicht unter ε gehen. und $\frac{\cdot}{0}$ zu vermeiden

8.4

4. *Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung*

Es sei das RK-ESV mit dem folgenden Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

a) Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).

b) Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren?

a) $k_1 = f(t_n, y_n)$

$k_2 = f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h(k_1 + 3k_2)$

b) 1) Autonomisierung überprüfen: $\sum b_i = 1$, $c_i = \sum_j a_{ij}$

2) Taylor / Theorem mit Summen

$$\sum_i b_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum b_i c_i = \frac{1}{2}$$

$\sum b_i c_i = 0 + \frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ✓ → $\underline{\text{ord } 2}$

aber $\sum b_i c_i^2 = 0 + \frac{2}{3}\frac{9}{16} = \frac{3}{8}$ ↯ $\longrightarrow$ Ordnung 2