Today:

- Definitionen
- Fixpunkt- & Nullstellenproblem
- Animations

Def: Sei $\phi : \Omega \to \Omega$ eine Funktion. Wir nennen $x^* \in \Omega$ ein <u>Fixpunkt (FP)</u> von ϕ,

falls $$\phi(x^*) = x^*$$

In anderen Worten lösst es das Fixpunktproblem (FPP) $\phi(x) = x$.

Def

Ein FPP nennt man konsistent mit dem Nullstellenproblem, falls

$$f(x^*) = 0 \iff x^* = \phi(x^*)$$

Def: Ein Verfahren der Form

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$$

heisst Fixpunktiteration (FPI)

Bem:
- FPI ist nicht eindeutig
- FPI muss nicht konvergieren!
- Falls die FPI konvergiert, kann sie verschieden schnell sein.

Def:

Eine konvergente Folge $x^{(k)}$ mit Grenzwert x^* hat Konvergenzordnung p,

falls $\exists C \in [0,1)$ s.d

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq C\,|x^{(k)} - x^*|^p \quad , \text{ für genügend Gross } k.$$

Fixpunkt:

In der VL: $f(x) := xe^x - 1 \overset{!}{=} 0$

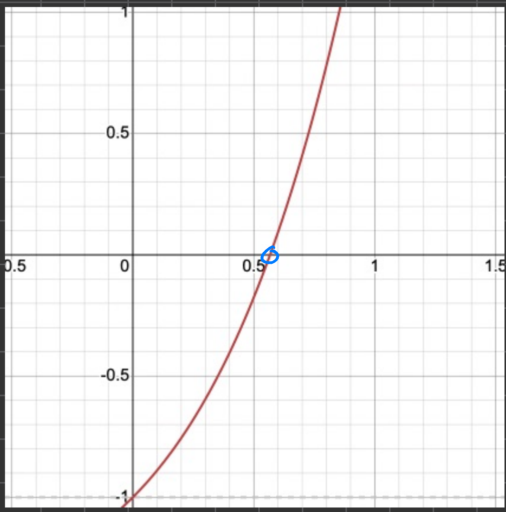
Now: $f(x) = 0 \iff \phi_1(x) = \frac{1}{e^x} = x \quad \Big| \quad \frac{1}{e^x} = x \iff 1 = xe^x \iff f(x) = 0$

$$\iff \phi_2(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)} = x$$

$$\iff \phi_3(x) = x - xe^x + 1 = x$$

Wir benutzen: $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots$

$f(x) = xe^x - 1$



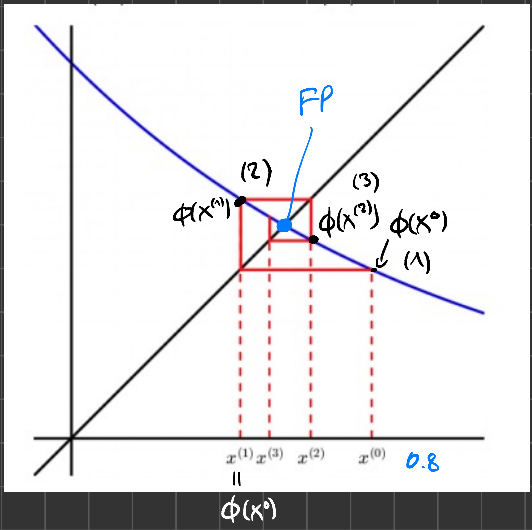
Now: $f(x) = 0 \iff \phi_1(x) = \frac{1}{e^x} = x \quad \Big| \quad \frac{1}{e^x} = x \iff 1 = xe^x \iff f(x) = 0$

$$\iff \phi_2(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)} = x$$

$$\iff \phi_3(x) = x - xe^x + 1 = x$$

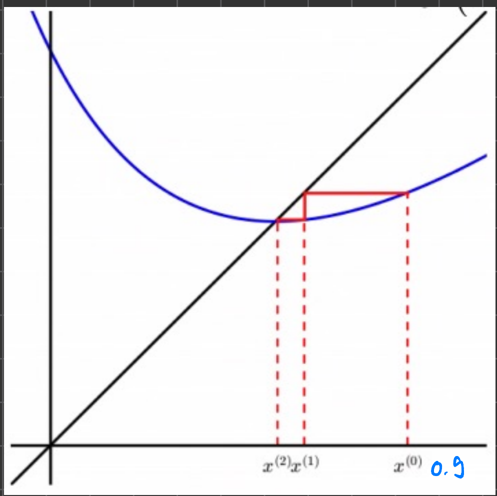
Wir benutzen: $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

ϕ_1 : e^{-x}

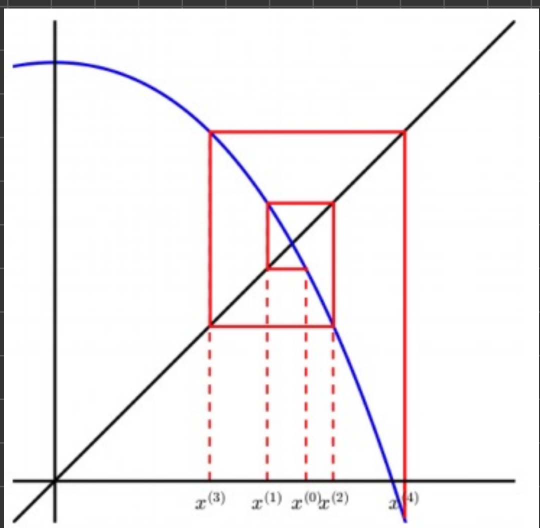


$\phi(x^{(0)}) = x^{(1)}$

ϕ_2 : $\dfrac{x^2 e^x + 1}{e^x(1+x)}$



ϕ_3 : $x - xe^x + 1$



Bisektionsverfahren

Annahmen: $\exists a, b$ s.t $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (O.B.d.A $a < b$)

Methode:
- Halbiere $[a, b) \longrightarrow [a, \frac{b-a}{2}]$ & $[\frac{b-a}{2}, b]$
- Überprüfe $f(\frac{b-a}{2}) \overset{?}{\gtrless} 0$ und wähle $x \in \{a, b\}$ s.d $f(x) <> 0$, $f(\frac{b-a}{2}) \gtrless 0$

Bem: langsame Konvergenz (lin.)

Newton

Idee: linearisie f

Also $f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \underbrace{+ \mathcal{O}((x - x_k)^2)}_{\text{neglect this}}$

Schritte im NV

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

In Worten: Approximiere die NS von f indem man die Tangenten von $f(x^{(k)})$ mit der x-Achse schneidet und so $x^{(k+1)}$ bestimmt.