Today:

- RECAP
- S10, A4
- DAHLQUIST

RECAP:

Konsistenz: Ein Fixpunktproblem ist konsistent mit dem Nullstellenproblem, falls

$$f(x^*) = 0 \iff \phi(x^*) = x^*$$

Fixpunktiteration: Fixpunktiteration sind Verfahren der folgenden Form

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \quad , k = 0, 1, ..$$

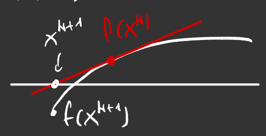
! Lsg ist nicht eindeutig ! (Kann divergieren)

Konvergenzordnung: Eine konvergente Folge $x^{(k)}$ mit Grenzwert x^* hat Konvergenzordnung p. Falls $\exists c \in [0,1)$ s.d.:

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq c \cdot |x^{(k)} - x^*|^p \quad \text{(für } k \text{ gross genug)}$$

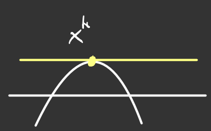
NEWTON

Approximiere NS von f indem man die Tangente von $f(x^{(k)})$ der x-Achse schneidet und so $x^{(k+1)}$ bestimmt.



Schritt:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$



Bem:
- Problem bei Extremstellen $f'(x) = 0$
- Problem: Könnte oszillieren $\rightsquigarrow$ nicht konvergieren (could fix this)
- Konvergiert (sometimes) quadratic.

$$x^{(k)} \rightleftarrows x^{(k+1)}$$

BISEKTIONSVERFAHREN

Gegeben a, b s.d $f(a) < 0 < f(b)$. (Stetigkeit $\Rightarrow$ NS in (a,b))

Halbiere das Intervall so dass die Endpunkte x, y : $f(x) < 0 < f(y)$ erfüllen.

S10, A4

4. *Explizites und Implizites Euler-Verfahren*

Für das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ ist ein Schritt des impliziten Euler-Verfahrens durch

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

definiert.

a) Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Führen Sie (analytisch) einen Schritt (mit Schrittweite h) mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren aus.

b) Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = -t(y(t))^2, \qquad y(t_0) = y_0 > 0,$$

Führen Sie (analytisch) einen Schritt (mit Schrittweite h) mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren aus.

a)

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h\cdot(-\lambda y_0) = \underbrace{(1-h\lambda)}_{g(h\lambda)} y_0 \quad | \text{ Explizit}$$

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-\lambda y_1) = y_0 - h\lambda y_1 \quad | \text{ Implizit}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1+h\lambda} \longrightarrow g = \frac{1}{1+h\lambda}$$

b)

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(t_0, y_0) = y_0 + h(-t_0 y_0^2) = y_0(1 - ht_0y_0) \quad | \text{ Explizit}$$

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 - ht_1y_1^2 \iff ht_1y_1^2 + y_1 - y_0 = 0 \iff y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4ht_1y_0}}{2ht_1}$$

Lsg bei imp. Eul. nicht eindeutig.

DALQ / STABILITÄTSANALYSE

AWP: $\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ nennt Dahlquist-Test Gleichung (-Test AWP)

Lsg: $y_0 e^{\lambda t}$

__Def__: ESV angewendet auf das Dahlquist AWP kann min in folgende Form schreiben $y_{j+1} = g(\underbrace{h\lambda}_{z})\, y_j$

Wir nennen g die Stabilitätsfunktion.

__Bsp__: Explizit Euler: $g = 1 + \lambda h$

Implizit Euler: $g = \dfrac{1}{1-\lambda h} = \dfrac{1}{1-z}$

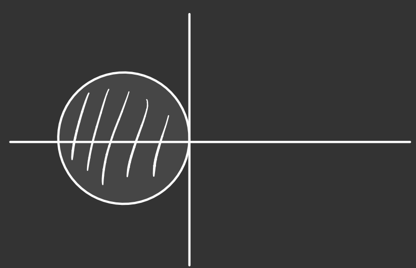
Heun-Verfahren: $g = 1 + z + \frac{1}{2} z^2$, $z = \lambda h$

Klassisches RK: $g = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4$, $z = \lambda h$

STABILITÄTSGEBIET

$SG := \{ z \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1 \}$

z.B. für $g = (1+z)$ (Expl. Euler):



Mit SG können "Stabilität" analysieren:

__A-Stabilität__: Ein Verfahren heisst A-stabil, falls die gesamte linke komplexe Halbebene im SG enthalten ist.

i.e. $\{ z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0 \} \subseteq SG$

__L-Stabilität__: Ein Verfahren heisst L-stabil falls es A-stabil ist und

$$\lim_{z \to -\infty} g(z) = 0$$

Ist impl. Euler A-stabil? $\left(g = \frac{1}{1-z}\right)$

Ja! impl Euler ist A-stabil

Für $z = a + ib$, $a < 0$ gilt $\left|\frac{1}{1-a-ib}\right| < 1$