Today:

28.05.21

- RECAP
- STEIFIGKEIT
- S12 A1

RECAP:

Stabilitätsgebiet: Das Gebiet SG heisst Stabilitätsgebiet

$$SG := \{ z = h\lambda \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1 \}$$

A-Stabilität: Ein Verfahren heisst A-stabil, falls die gesamte linke komplexe Halbebene im SG enthalten ist i.e.

$$\{ z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0 \} \subseteq SG$$

L-Stabilität: Ein Verfahren heisst L-stabil, falls es A-stabil ist und

$$\lim_{z \to -\infty} g(z) = 0$$

Steifheit

Die Steifheit ist schwierig zu definieren, aber im Grunde sind es Probleme bei dem ESV (oder MSV), wegen der Beschränktheit des SG, Schwierigkeiten aufweisen

Das Paradebeispiel: Van der Pol Gleichung

$$y'' - \mu (1 - y^2) y' + y = 0 \quad , \mu > 0 \quad (1)$$

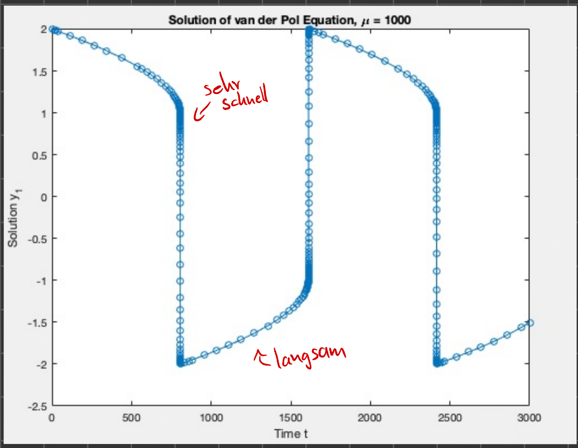
non-conservative oscillator w/ linear damping

Mit $\mu = 1$: ist die Gleichung (1) nicht stief und lässt sich mit ESV (ode45) lösen.

Mit $\mu = 1000$: kriegen wir Probleme (Bem: Desto grösse $\mu \to$ desto stiefer)

Wann ist ein Problem stief? (See MATLAB)

- Wenn in einem System schnelle Übergänge stattfinden



- Steifheitsparameter

Ein lineares System $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ bezeichnet man als (matrix)

steif, wenn für die Eigenwerte von A: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt $Re(\lambda_i) < 0$ und

$$S := \frac{\max\limits_{i \le n} |Re(\lambda_i)|}{\min\limits_{i \le n} |Re(\lambda_i)|} \gg 1$$

man kann mit Riesz die Eigenwerte ordnen und dann: $S = \frac{|Re(\lambda_n)|}{|Re(\lambda_1)|}$

Differentialgleichungen Matrixform

löse: $\dot{y}(t) = Ay(t)$

1) Diagonalisiere von A: $D = T^{-1}AT$ (diag.)

2) Dann $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_i$ sind die EW. und T die zugehörigen EV

3) $\dot{y}(t) = TDT^{-1}y(t)$

$\hookrightarrow x(t) = T^{-1}y(t)$, $\dot{x}(t) = Dx(t) \overset{Lsg}{\Rightarrow} x = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n \cdot e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

4) $y(t) = Tx(t)$

1. ***Stabilitäts-funktionen und Gebiete***

a) Berechnen Sie die Stabilitäts-funktionen folgender Verfahren:

(i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(iii) Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(v) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Hinweis: (i) und (ii) wurde bereits in der Vorlesung berechnet.

ii)

AWP: $\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ nennt Dahlquist – Test Gleichung (–Test AWP)

Lsg: $y_0 e^{\lambda t}$

Def: ESV angewendet auf das Dahlquist AWP kann man in folgende Form schreiben $y_{j+1} = g(\underbrace{h\lambda}_{z})\, y_j$

Wir nennen g die Stabilitätsfunktion.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

nach y_j auflösen

$k_1 = f(t_j + h, y_j + hk_1) = \lambda(y_j + hk_1) \iff (1-h\lambda)k_1 = \lambda y_j \rightsquigarrow k_1 = y_j\left(\frac{\lambda}{1-h\lambda}\right)$

Also ist $y_{j+1} = y_j + h \cdot k_1 = \left(\frac{1}{1-\underbrace{h\lambda}_{z}}\right)y_j$.

$\Rightarrow g(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)$

v) $$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$k_1 = f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) = \lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda k_1 \iff \lambda y_j = (1-\frac{h}{2}\lambda)k_1$

$\hookrightarrow k_1 = y_j\left(\frac{\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda}\right) = y_j\left(\frac{2\lambda}{2-h\lambda}\right)$

Dann $y_{j+1} = y_j + hk_1 = \left(1 + \frac{2h\lambda}{2-h\lambda}\right)y_j = \left(\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right)y_j$

$\longrightarrow g(z) = \left(\frac{2+z}{2-z}\right)$