Zusammenfassung

INTERPOLATION

Lagrange Polynome $\quad \ell_j^n(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$

Sei $f \in C^0([a,b])$ mit den Stützstellen $x_1,\dots,x_n$. Wir interpolieren f mit einem Polynom vom Grad n

$$p_n(x) = \sum_{j\leq n} f(x_j)\, \ell_j^n(x)$$

Interpolationsfehler :

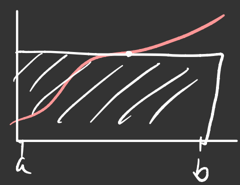
$$|e_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} \underbrace{(x-x_j)}_{\leq b-a} \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

QUADRATUR

$$Q^{(n)}_{[a,b]}[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{j\leq n} f(x_j) \underbrace{\int_a^b \ell_j(x)\,dx}_{:=\alpha_j} = \sum_{j\leq n} f(x_j)\, \alpha_j$$

α_j ← Gewichte

Newton-Cotes (NC) : Stützstellen sind äquidistant. ($n=2 \longrightarrow$ Simpson)



Mittelpunktsregel : $\quad Q_{[a,b]}[f] = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad$ ord : 1

Trapezregel : $\quad Q_{[a,b]}[f] = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \quad$ ord : 1

Simpsonregel : $\quad Q_{[a,b]}[f] = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \quad$ ord : 3

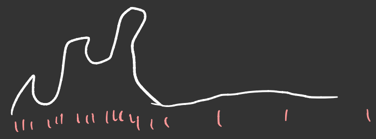
Wir definieren den Quadraturfehler

$$E[f] := |Q[f] - I[f]|$$

<u>Bem</u>: Bei Quadraturregel mit Ordnung n gilt : $E[f] \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} (b-a)^{n+1}$

Summierte Quadratur $\quad [A,B] \longrightarrow [A,B] = \bigcup_i [a_i, b_i]$

Adaptive Quadratur



Algorithm 1: Adaptive Quadratur

def integriere(f, a, b, ε):
- $Q \leftarrow Q_{[a,b]}[f]$
- $Q' \leftarrow Q_{[a,\frac{a+b}{2}]}[f] + Q_{[\frac{a+b}{2},b]}[f]$
- **if** $|Q - Q'| > \varepsilon$ **then**
  - m = $\frac{a+b}{2}$
  - **return** integriere (f, a, m, $\frac{\varepsilon}{2}$)+integriere (f, m, b, $\frac{\varepsilon}{2}$)
- **else**
  - **return** Q'
- **return**

Bei starken Änderungen
$\hookrightarrow$ feinere Intervalle

Bei wenig Änderungen
$\hookrightarrow$ grobere Intervalle

Zwei-dimensionale Quadratur

$$\int_0^1 \underbrace{\int_0^1 f(x,y)\,dx}_{:=F(y)}\,dy \approx Q_{[0,1]}[F] = \sum_{j \leq m} \alpha_j F(x_j)$$

$$\approx \sum_{j \leq m} \alpha_j Q_{[0,1]}[f] = \sum_{i,j=0}^{m} \alpha_i \alpha_j f(x_i, x_j) =: Q_{m \times m}[f]$$

<u>Bem</u>: Bei $\mathbb{R}^d$ erhält man m^d aufzusummierende Terme $\longrightarrow$ Curse of dimensionality

Konvergenzordnung

Algebraische Konvergenz : $E(h) \leq C \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p)$

Geometrische Konvergenz : $E(h) \leq C \cdot q^h = \mathcal{O}(q^h)$

MATLAB: p = polyfit(log($\frac{1}{h}$), log($E(h)$), 1)

q = polyfit (1/h, log (1/h), 1)

$$\langle f,g \rangle = \int f g \, dx$$

<u>Gauss Quadratur</u>

Legendre-Polynom: $q_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ erfüllt $\int_{-1}^{1} q_{n+1}(x) h(x)\, dx = 0$, $\forall h \in \mathbb{P}_n$, $q_{n+1}(1) = 1$

Die n+1 Gauss Quadratur auf [-1,1] hat

Gewichte: $w_j := \dfrac{2(1-x_j^2)}{[(n+1) q_n(x_j)]^2}$

Knoten : NS von q_{n+1}

- Exponentielle Konvergenz
- Ordnung $2n+2$ (das ist best possible)

EINSCHRITTVERFAHREN

AWP : $\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

n-ter Ord

AWP erster Ord.

Reduktion : $\begin{cases} y^{(1)} = f_1(t, y(t)) \\ \vdots \\ y^{(n)} = f_n(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z(t) = [y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}]^T \\ \dot{z}(t) = [y^{(1)}, \dots, y^{(n)}]^T \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$

Satz (Satz von Picard / Cauchy-Lipschitz)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & , t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 & , x_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad (1)$$

Falls $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^d)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt auf $[0, T)$ dann existiert eine eind. Lsg die $C^1(I)$ (zu (1)) auf $[0, T)$ ist.

Lipschitz Bedingung

f erfüllt LB falls ein $C_f > 0$ existiert so dass für all $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq C_f |x_1 - x_2|$$

Runge Kutta

s-stufiges RK: $x^{j+1} = x^j + h \sum_{i=0}^{s} b_i k_i \quad , \quad k_i = f(t_j + c_i h, y_j + h \sum_{\ell=1}^{s} a_{i,\ell} k_\ell)$

$y^{j+1} = y^j$

Die genelle n-step RK-Methode :

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^{k+j} = h \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(t_{k+1}, x^{k+j}) \quad , \alpha_n \neq 0$$

Falls $\beta_n = 0$, dann erhält man x^{k+n} explizit von dem vorherigen x^j und $f(t_j, x^j)$ dann nennt man diese Methode explizit.

Bei $\beta_n \neq 0$, dann nennt man sie implizit.

Butcher-Tableau (BT)

RK: $x^{j+1} = x^j + h\sum^s b_i k_i$, $k_i = f(t_j + c_i h, y_j + h\sum_{l=1}^{s} a_{i,l} k_l)$

BT sind von der Form

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Die klassische RK (The RK4)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Def: Der globale Diskretisierungsfehler (GDF) zur Zeit t_j

$$E_j := \underset{\text{real}}{y(t_j)} - \underset{\text{abschätzung}}{y^j}.$$

Def: ESV ist konvergent von der Ordnung p (KO p), falls

$$E := \max_{j=0,\dots,N} |E_j| = \mathcal{O}(h^p), \; h \to 0.$$

Def: Der lokale Diskretisierungsfehler (LDF) zur Zeit t_j

$$e_j := y(t_j) - \left(y(t_{j-1}) + h \cdot \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h)\right)$$

Def: Der Konsistenzfehler (KF) zur Zeit t_j

$$\tau_j = \frac{e_j}{h} = \boxed{\frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{h} - \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h)}$$

Def: Ein ESV heisst <u>konsistent</u> der Ordnung p, falls

$$\tau := \max_{j=0,\dots,N} |\tau_j| = \mathcal{O}(h^p), \; h \to 0$$

Wie zeigt man Ordnung?

1) Überprüfen $\sum b_k = 1$
2) Entwickle ϕ und $y(t+h)$ in ihre Taylorreihen ~~(bzg h)~~ um $h=0$
3) ???
4) profit

Def:

Ein RK-Methode heisst autonomierungsinvariant, falls gilt:

$$\sum_i b_i = 1 \quad , \quad c_i = \sum_j a_{ij}$$

BIG BRAIN THM 1

Angenommen f ist glatt genug, dann ist die RK methode von Ordnung 2 falls

$$\sum_i b_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}$$

BIG BRAIN THM 2:

Angenommen f ist glatt genug, dann ist die RK methode von Ordnung 3 falls

$$\sum_i b_i = 1 \, , \, \sum_i b_i c_i = \frac{1}{2} \ \underline{\text{und}} \ \sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \, , \, \sum_i \sum_j b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$$

und von Ordnung 4, falls <u>zusätzlich</u>

$$\sum b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \, , \, \sum_i \sum_j b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \, , \, \sum_i \sum_j b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$$

$$\sum_i \sum_j \sum_e b_i a_{ij} a_{je} = \frac{1}{24}$$

Def: Sei $\phi: \Omega \to \Omega$ eine Funktion. Wir nennen $x^* \in \Omega$ ein Fixpunkt (FP) von ϕ, falls

$$\phi(x^*) = x^*$$

Konsistenz: Ein Fixpunktproblem ist konsistent mit dem Nullstellenproblem, falls

$$f(x^*) = 0 \iff \phi(x^*) = x^*$$

Fixpunktiteration: Fixpunktiteration sind Verfahren der folgenden Form

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \; k = 0, 1, ..$$

! Lsg ist nicht eindeutig ! (Kann divergieren)

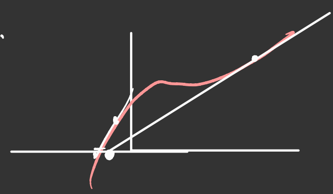
Konvergenzordnung: Eine konvergente Folge $x^{(k)}$ mit Grenzwert x^* hat Konvergenzordnung p. Falls $\exists c \in [0,1)$ s.d.:

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq c \cdot |x^{(k)} - x^*|^p \quad \text{(für } k \text{ gross genug)}$$

Bem:
- FPI ist nicht eindeutig
- FPI muss nicht konvergieren!
- Falls die FPI konvergiert, kann sie verschieden schnell sein.

NEWTON

Approximiere NS von f indem man die Tangente von $f(x^{(k)})$ mit der x-Achse schneidet und so $x^{(k+1)}$ bestimmt.



Schritt:

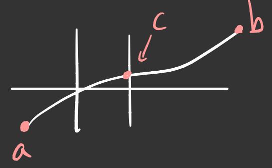
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Bem:
- Problem bei Extremstellen $f'(x) = 0$
- Problem: Könnte oszillieren $\rightsquigarrow$ nicht konvergieren (could fix this)
- Konvergiert (sometimes) quadratic.

BISEKTIONSVERFAHREN

Gegeben a, b s.d $f(a) < 0 < f(b)$. (Stetigkeit $\Rightarrow$ NS in (a,b))

Halbiere das Intervall so dass die Endpunkte x, y : $f(x) < 0 < f(y)$ erfüllen.



$f(c) > 0$? or $f(c) < 0$?

DALQ / STABILITÄTSANALYSE

AWP : $\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ nennt Dahlquist-Test Gleichung (-Test AWP)

<u>Def</u> : ESV angewendet auf das Dahlquist AWP kann man in folgende Form schreiben

$$y_{j+1} = g(\underbrace{h\lambda}_{z})\, y_j$$

Wir nennen g die Stabilitätsfunktion.

<u>Bsp</u> : Explizit Euler : $g = 1 + \lambda h$

Implizit Euler : $g = \dfrac{1}{1-\lambda h} = \dfrac{1}{1-z}$

<u>Stabilitätsgebiet</u> : Das Gebiet SG heisst Stabilitätsgebiet

$$SG := \{ z = h\lambda \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1 \}$$

<u>A-Stabilität</u> : Ein Verfahren heisst A-stabil, falls die gesamte linke komplexe Halbebene im SG enthalten ist i.e.

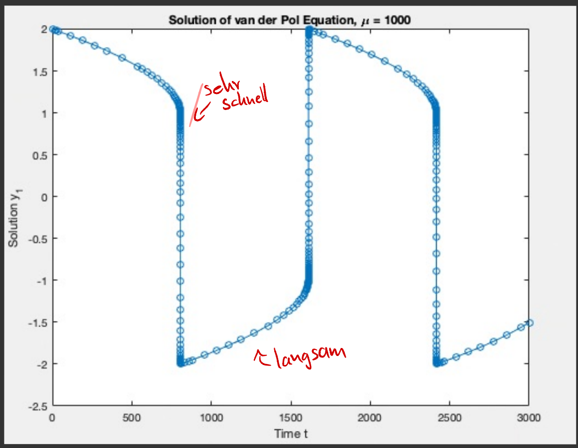
$$\{ z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0 \} \subseteq SG$$

<u>L-Stabilität</u> : Ein Verfahren heisst L-stabil, falls es A-stabil ist und

$$\lim_{z \to -\infty} g(z) = 0$$

Wann ist ein Problem stief ?

- Wenn in einem System schnelle Übergänge stattfinden



- Steitheitsparameter

  Ein lineares System $\dot{\vec{y}}(t) = \underset{\text{matrix}}{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ bezeichnet man als steif, wenn für die Eigenwerte von A : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt $Re(\lambda_i) < 0$ und

$$S := \frac{\max_{i \leq n} |Re(\lambda_i)|}{\min_{i \leq n} |Re(\lambda_i)|} \gg 1$$

SEE MIRLAN ZUMFASSUNG
(IS GUD)

La Fin