Aufgabe 3.

$x = \tan(s)$

$dx = \cos^{-2}(s) = \sec^2(s)$

$$I = \int_0^\infty \exp(-x^4)\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^{\pi/2} \exp(-\tan^4(s)) \frac{1}{\cos^2(s)}\,ds$$

↖ "uneigentlich" ↖ "eigentliches" integral.

Aufgabe 4

a) $$f(x) \approx p[f|x_0, x_1, x_2](x) = \sum_{j=0}^{2} f(x_j)\, L_j^2(x)$$

$$= f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + f(x_1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2) \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

- $$p'[f|x_0, x_1, x_2](x) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} (2x - (x_1+x_2)) + \dots$$

- $$p''[f|x_0, x_1, x_2](x) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dots$$

b)

$x_0 = x-h,\ x_1 = x,\ x_2 = x+h$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{1}{2} h f''(\xi_x)$$

- $$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}\Big(f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\underset{[x-h,x)}{\xi_1}) - f(x) + hf'(x) - \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\underset{(x,x+h)}{\xi_2})\Big)$$

$$= f'(x) + \frac{1}{6}h^2 \underbrace{f'''(\xi_x)}_{=\frac{1}{2}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))}, \quad \xi_x \in [x-h, x+h)$$

- $$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \dots = f''(x) + \frac{1}{24}h^2 \Big(f^{(4)}(\underset{[x-h,x)}{\hat{\xi}_1}) + f^{(4)}(\underset{[x,x+h)}{\hat{\xi}_2})\Big) = f''(x) + \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\underset{(x-h,x+h)}{\hat{\xi}_x})$$

$f'' = (f')'$

Gauss-Quadratur

Wir haben gesehen für interpol. Quadraturformeln.

$$Q^{(n)}_{[a,b]}[f] = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) \quad , \quad \alpha_j = \int_a^b \ell_j(x)\,dx$$

$n+1$ versch. Stützstellen in $[a,b]$

Nach Konstruktion haben wir mind. Ordnung $\underline{n+1}$. (exact für Polynome Grad n)

In VL haben wir NC gesehen, welches die Polynome vom Grad $n+1$ exakt. integriert $\longrightarrow$ Ordnung $\underline{n+2}$

Da wir $n+1$ Stützstellen haben und $n+1$ Gewichte, haben wir $2n+2$ Freiheitsgrade

$\xhookrightarrow[\text{intuition}]{}$ Ordnung $2n+2$ möglich!!

Gauss'sche Quad. erzielt $2n+2$ Ordnung.

Def: Das Legendre-Polynom $q_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ erfüllt.

$$\int_{-1}^{1} q_{n+1}(x) h(x)\,dx = 0, \ \forall h \in \mathbb{P}_n, \ q_{n+1}(1) = 1$$

$, \forall h \in \mathbb{P}_n$

Bem: Eindeutig.

Bem: Die Existenz der Legendre Poly. konstruktiv mit GS bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2}$ auf monom basis $1, x, x^2, \dots$

Bsp

$q_0 = 1$

$q_1 = x$

$q_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$q_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$q_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Satz

Seien $x_0, \dots, x_n \in (-1,1)$ die NS des Legendre-Poly. q_{n+1} und $\ell_0, \dots, \ell_n$ die entsprechende Lagrange-Basis setze $\alpha_j = \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\,dx$, dann hat

$$G^{(n)}_{[-1,1]}[f] = \alpha_0 f(x_0) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Ordnung $2n+2$, dass heisst exakt für $f \in \mathbb{P}_{2n+1}$

Bsp:

$$G^{(1)}_{[-1,1]}[f] = f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{1/3}\right)$$

$$G^{(2)}_{[-1,1]}[f] = \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{3/5}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{3/5}\right)\right)$$

Bem:

Zeige $\alpha_j^{(n)} > 0$