3. *Adaptive Quadratur mit der Trapezregel*

In dieser Aufgabe wollen wir eine adaptive Quadratur Methode zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

entwickeln und implementieren basierend auf der Trapezregel. Wie in der Vorlesung diskutiert, benötigt man dafür einen Fehler-Schätzer. Hierzu vergleichen wir das Resultat der Trapezregel

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

mit dem Resultat der zusammengesetzten Trapezregel

$$Q_1^2[f] = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

(mit zwei Teil-Intervallen).

a) Bestimmen Sie den Fehler-Schätzer $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]|$.

a) $E^1[f] = |Q_1[f] - I[f]| = |\underbrace{Q_1[f] - Q_1^2[f]}_{a} + \underbrace{Q_1^2[f] - I[f]}_{b}| \leq |Q_1^2 - Q_1| + |Q_1^2 - I|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{d}{dt}x + x = 1 \qquad \text{(Ordnung 2)}$$

Falls wir ein DGL Ordnung n haben:

$$F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \dots, \frac{d^n x}{dt^n}(t)\right) = 0 \qquad (1)$$

Wobei hier $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dann nennen wir $\varphi \in C^n(I)$ eine Lsg von (1) falls I offen in $\mathbb{R}$

$$F\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}(t), \dots\right) = 0$$

Falls $x(t) \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir DGLs der Ord. n:

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}}\right), \ t \in I$$

Definiere für die Reduktion:

$$y(t) := \Big(\underbrace{x(t)}_{\in \mathbb{R}^d}, \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\in \mathbb{R}^d}, \dots, \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\Big) \in \mathbb{R}^{nd}$$

Dann $F(t,y) := (y_1, y_2, \dots, y_n, f(t, y_1, \dots, y_n))$

$\hookrightarrow$ (1) is äquiv. zu $\dfrac{dy}{dt} = F(t, y(t))$

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{pmatrix} \qquad F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \tilde{F}(y)$$

<u>Bsp</u>

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)\,x(t) = g(t)$$

funktion funktion

Dann haben wir

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \underbrace{g(t) - p(t)\frac{dx}{dt} - q(t)x(t)}_{\frac{d^2}{dt^2}x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix}}_{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}}_{b} = Ay + b$$

d) **[2 Punkt(e)]** Es ist bekannt, dass die Ladung Q eines Kondensators in einem RLC Schaltkreis die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

erfüllt. Hier ist L die Induktivität , R der Widerstand, C die Kapazität und $E(t)$ die Anregung. Die Anfangswerte seien gegeben durch $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = I_0$.

Schreiben Sie dieses Anfangswertproblem zweiter Ordnung als ein Anfangswertproblem erster Ordnung.

d)

$$y = \begin{pmatrix} Q \\ \dot{Q} \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \frac{1}{L}(E(t) - R\dot{Q} - \frac{Q}{C}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L}E(t) \end{pmatrix}$$

Die Haupt-Probleme der ODEs sind:

- Existenz der Lösung
- Eindeutigkeit der Lösung mit geg. AfB (Anfangsbed.)
- Regularität und Stabilität der Lsg
- Berechnung Losungen

Bem: Existenz: Fixpunktsatz Banach, Satz vom impliziten (FA I)

↖ is easy

Eindeutig

↖ schwierig

Satz (Satz von Picard / Cauchy-Lipschitz)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) & , t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 & , x_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad (2)$$

Falls $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^d)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt auf $[0,T)$ dann existiert eine eind. Lsg die $C^1(I)$ (zu (2)) auf $[0,T]$ ist.

Lipschitz Bedingung

f erfüllt LB falls ein $C_f > 0$ existiert so dass für all $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq C_f |x_1 - x_2|$$