Agenda:

1. Besprechung S6
2. Definitionen / Theorie
3. Prüfungsaufgabe

S6

1.

Trick: Argumentiere C^1. Also bei $f(x) = x^2 \longrightarrow 2x$ ist stetig, ergo nimmt ein max auf $[-1,1]$. ($L = \max_{x \in I} 2x$)

$$\text{Z}: \quad |f(x) - f(y)| \leq \underline{L \cdot |x-y|}, \quad \forall x,y \in I$$

Also $f(x) = x^2$: $\quad |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 2 \text{ bei } I} \cdot |x-y| \leq 2|x-y|$. $\square$

Def: Der globale Diskretisierungsfehler (GDF) zur Zeit t_j

$$E_j := \underset{\text{real}}{y(t_j)} - \underset{\text{abschätzung}}{y^j}.$$

Def: Der lokale Diskretisierungsfehler (LDF) zur Zeit t_j

$$e_j := y(t_j) - \left(y(t_{j-1}) + h \cdot \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h)\right)$$

Def: ESV ist konvergent von der Ordnung p (KO p), falls

$$E := \max_{j=0,\ldots,N} |E_j| = \mathcal{O}(h^p), \quad h \to 0.$$

$\underline{f(x) = \mathcal{O}(g(x))}$, $x \to a$ falls

$$\limsup_{x \to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$$

Def: Der Konsistenzfehler (KF) zur Zeit t_j

$$\tau_j = \frac{e_j}{h} = \boxed{\frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{h} - \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h)}$$

Def: Ein ESV heisst konsistent der Ordnung p, falls

$$\tau := \max_{j=0,\dots,N} |\tau_j| = \mathcal{O}(h^p), \; h \to 0$$

Why? „Konsistenz sagt ob der Algo tatsächlich das gegebene Problem (gut) löst und nicht anderes."

Satz: Ein RK Methode ist $\underline{\text{konsistent}}$ $\Leftrightarrow \sum_k b_k = 1$

$p \geq 1$

Wie zeigt man Ordnung?

1) Überprüfen $\sum b_k = 1$
2) Entwickle ϕ und $y(t+h)$ in ihre Taylorreihen (bzg h)
3) ???
4) profit

W17: Wir betrachten AWP:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0,$$

und RK-ESV mit folgendem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

z.z.: Das Verfahren hat Konsistenzordnung $\underline{2}$ (und nicht 3)

Lösung:

1) $\sum b_i = 1$ ✓

2) $\underline{y}$: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(y(t), t) \cdot f(y(t), t)$$

$$\dddot{y}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(y(t) f(y(t))^2\right) + \left(\frac{df}{dy}(y(t))^2 f(y(t))\right)$$

$\underline{\Phi}$: <u>Methode 1</u>: k_1, k_2, k_3 in Taylorreihen entwickeln

<u>Methode 2</u>: Φ direkt zu entwickeln

$$k_1 = f(t_j, y_j)$$
$$k_2 = f(t_j + \tfrac{1}{3}h, y_j + h\tfrac{1}{3}k_1)$$
$$k_3 = f(t_j + \tfrac{2}{3}h, y_j + h\tfrac{2}{3}k_1) \longrightarrow$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(k_2 + k_3)$$
$$\underline{\Phi(h) = \frac{1}{2}(k_2 + k_3)}$$

<u>Methode 1</u>:

$$\begin{cases} k_1(h) = f(y(t)) \\ k_2(h) = f(y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) \overbrace{\tfrac{1}{3} h f(y(t))}^{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t)) \left(\tfrac{1}{3} h f(y(t))\right)^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ k_3(h) = f(y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) \left(\tfrac{2}{3} h f(y(t))\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t)) \left(\tfrac{2}{3} \cdot h \cdot f(y(t))\right)^2 + \mathcal{O}(h^3) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \Phi(h) = \frac{1}{2}(k_2(h) + k_3(h)) = f(y(t)) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(y(t) \cdot f(y(t))$$
$$+ \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t)) \cdot f(y(t))^2 \cdot \frac{6}{18}$$

$$\frac{y(t_j)-y(t_{j-1})}{h} - \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h) =$$

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \frac{\cancel{y(t)} + h\dot{y}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t) + \frac{h^3}{6}\dddot{y}(t) - \cancel{y(t)}}{h} = f + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial t} f(y(t),t)\cdot f(y(t),t)$$

$$+ \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(y(t)\, f(y(t))^2\right) + \left(\frac{df}{dy}(y(t))^2 f(y(t))\right)$$

$$= \cancel{f} + \cancel{\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial t} f(y(t),t)\cdot f(y(t),t)} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(y(t)\, f(y(t))^2\right) + \left(\frac{df}{dy}(y(t))^2 f(y(t))\right) + \mathcal{O}(h^3) -$$

$$\cancel{f(y(t))} + \cancel{\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\cdot f(y(t))} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))\cdot f(y(t))^2\cdot\frac{6}{18} + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2)$$

streicht sich nicht weg $\rightarrow \mathcal{O}(h^2)$