Agenda:

① Nachbesprechung S7

(② Theorie (?))

③ Vorbesprechung S8 / Alte Prüfungsaufgabe

Aufgabe 2:

$$\boxed{I[g] = \int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right) = Q[g]}$$

a) z.z.: Ordnung = 2

$I[1] = 1$

$I(x) = \frac{1}{2}$

$I[x^2] = \frac{1}{3}$

$$\not\Longleftrightarrow$$

$Q[1] = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

$Q(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$Q(x^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{5}{16}$

$\Rightarrow$ Ordnung 2.

b) Benutze die Quadraturformel um ein RK-ESV herzuleiten

Lsg: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$

$y(t_0) = y_0$

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(s, y(s))}_{\dot{y}}\,ds \approx y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(t_0 + \frac{h}{4}, y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right)\right) + f\left(t_0 + \frac{3h}{4}, y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right)\right)\right]$$

$\hookrightarrow$ BT

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/4 & 1/4 & & \\ 3/4 & 3/4 & & \\ \hline & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Def:

Ein RK-Methode heisst autonomierungsinvariant, falls gilt:

$$\sum_i b_i = 1 \quad , \quad c_i = \sum_j a_{ij}$$

d) [2 Punkt(e)] Ist das klassische Runge-Kutta Verfahren,

$$\begin{array}{c|cccc}
c_i\ \ 0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\ \ b_i
\end{array} ,$$

autonomisierungsinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum b_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \checkmark$$

$$c_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_{21}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}$$

S18

2. *Konsistenzordnung und Stabilitätsfunktion* **[14 Punkt(e)]**

Wir betrachten folgende Familie von Einschrittverfahren

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2\alpha} f(t_j, y_j) + h\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_j + \alpha h, y_j + \alpha h f(t_j, y_j)).$$

Hierbei ist α ein Parameter.

a) **[1 Punkt(e)]** Schreiben Sie dieses Verfahren in der Form eines Butcher-Tableaus.

b) **[6 Punkt(e)]** Bestimmen Sie alle möglichen Werte des Parameters α damit das resultierende Verfahren genau Konsistenzordnung zwei hat.

a)

$b_1 = \frac{1}{2\alpha}$ $\quad c_1 = 0$

$b_2 = (1 - \frac{1}{2\alpha})$, $c_2 = \alpha$, $a_{21} = \alpha$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & \\ \hline & 1/2\alpha & (1-\frac{1}{2\alpha}) \end{array}$$

b)

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \phi(\dots) = \frac{\cancel{y(t)} + h\dot{y}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t) + \frac{h^3}{6}\dddot{y}(t) + \mathcal{O}(h^4) - \cancel{y(t)}}{h} - \phi(\dots)$$

$$= \dot{y}(t) + \frac{h}{2}\ddot{y}(t) + \frac{h^2}{6}\dddot{y}(t) - \Big[\frac{1}{2\alpha}\underbrace{f(t_j, y_j)}_{f} + (1-\tfrac{1}{2\alpha})\underbrace{f(t_j + \alpha h, y_j + \alpha h f(t_j, y_j))}_{= f + h(\alpha f_t + \alpha f \cdot f_y) + \frac{h^2}{2}(\alpha^2 f_{tt} + 2\alpha f f_{ty} + \alpha^2 f^2 f_{yy})}\Big] + \mathcal{O}(h^3)$$

$$= \cancel{f} + \frac{h}{2}\dot{f} + \frac{h^2}{6}\ddot{f} - \Big(\cancel{\tfrac{1}{2\alpha}f} + (1-\tfrac{1}{2\alpha})\big(\cancel{f} + h(\alpha f_t + \alpha f \cdot f_y) + \tfrac{h^2}{2}(\alpha^2 f_{tt} + 2\alpha f f_{ty} + \alpha^2 f^2 f_{yy})\big)\Big) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$h: \frac{1}{2}\dot{f} - (1 - \tfrac{1}{2\alpha})\underbrace{(\alpha f_t + \alpha f \cdot f_y)}_{= f} = 0 \iff \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2\alpha} \iff \alpha = 1.$$

Also haben gezeigt, dass es von Ordnung 2 ist aber noch nicht, dass es nicht von Ordnung 3 ist.

BIG BRAIN THM 1

Angenommen f ist glatt genug, dann ist die RK methode von Ordnung 2 falls $\sum_i b_i = 1$ und $\sum b_i c_i = \frac{1}{2}$

Also für uns: $\sum b_i c_i = \frac{1}{2} \iff \alpha\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2} \iff \alpha = 1$

BIG BRAIN THM 2:

Angenommen f ist glatt genug, dann ist die RK methode von Ordnung 3 falls $\sum_i b_i = 1$, $\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}$ und $\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$, $\sum_i \sum_j b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$

und von Ordnung 4, falls zusätzlich

$$\sum b_i c_i^3 = \frac{1}{4}, \quad \sum_i \sum_j b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}, \quad \sum_i \sum_j b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$$

$$\sum_i \sum_j \sum_\ell b_i a_{ij} a_{j\ell} = \frac{1}{24}$$

$$\sum b_i c_i^2 = b_2 c_2^2 = \left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)\alpha^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \overset{\alpha=1}{=} 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$$

Also kann es nicht von Ordnung 3 sein.