1. Häufige Fehler und Tipps

Gute Arbeit an die, die ihre Serie schon abgegeben haben, es gab keine wiederholende Fehler. Jedoch gibt es einen Fehler in den Musterlösungen, nämlich bei der Aufgabe 3 ist der MATLAB Code (und dem entsprechend auch der Graph) für die Chebyshev Stützpunkte falsch (siehe files).

Tipps gibt es nicht viele, da die Serie ziemlich einfach war aber:

1. Vereinfacht eure Rechnungen immer (Simplify your results)
2. Kommentiert euer Code grob. (What are you trying to do here etc.)

2. Interpolatorische Quadraturformeln [Not covered in Übung]

Für eine gegebene Funktion $f \in C^0([a,b])$, sollte die Trapez- und Mittelpunktsregel euch schon bekannt sein. Wir verallgemeinern dies jetzt für die gegebenen Stützstellen

$$a \leq x_1 < \ldots < x_N \leq b.$$

Dazu betrachten wir das interpolierende Polynom $p_n(x)$ vom Grad n in der Lagrange-Darstellung

$$p_n(x) = I^{(n)}[f] = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\ell_j(x), \quad \ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

Dann ergibt das bestimmte Integral von p_n eine Approximation zu $I_{[a,b]}[f]$

$$\begin{aligned} Q_{[a,b]}^{(n)}[f] &:= I_{[a,b]}\left[I^{(n)}[f]\right] = I_{[a,b]}\left[\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\ell_j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b \ell_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) \end{aligned}$$

wobei die (von $f(x)$ unabhängigen!) Skalare $\alpha_j = I_{[a,b]}[\ell_j] = \int_a^b \ell_j(x)\mathrm{d}x$ die **Gewichte** der Quadraturformel $Q_{[a,b]}^{(n)}[f]$ sind. Als ein Korollar erhalten wir die folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]\right| &\leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j| \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!} \\ &\leq (b-a)^{n+2} \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!} \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass f **genügend oft differenzierbar** ist. Wie wir später sehen werden, ist diese Abschätzung oft unbefriedigend grob.
Je nachdem ob die Stützstellen die Intervallenden enthalten, unterscheidet man zwischen offenen und geschlossenen Quadraturformeln.

a) Geschlossenen Newton-Cotes-Formeln

Die geschlossenen Newton-Cotes-Formeln erhält man mit der Stutzstellenwahl

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Man berechnet dann die Gewichte indem man $x = a + th$ setzt.

$$\alpha_j = \int_a^b l_j(x)dx = \int_a^b \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} dx = h \int_0^n \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{a + th - a - ih}{a + jh - a - ih} dt = h \int_0^n \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{t-i}{j-i} dt.$$

Also sehen wir, dass die Gewichte α_j unabhängig von der Wahl des Intervalls sind.

Beispiel 1 (Geschlossene NC für n=2).

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= h \int_0^2 \tfrac{t-1}{0-1} \tfrac{t-2}{0-2} \,\mathrm{d}t = \tfrac{h}{2} \int_0^2 \left(t^2 - 3t + 2\right) \mathrm{d}t = \tfrac{1}{3} h \\
\alpha_1 &= h \int_0^2 \tfrac{t-0}{1-0} \tfrac{t-2}{1-2} \,\mathrm{d}t = -h \int_0^2 \left(t^2 - 2t\right) \mathrm{d}t \quad = \tfrac{4}{3} h \\
\alpha_2 &= h \int_0^2 \tfrac{t-0}{2-0} \tfrac{t-1}{2-1} \,\mathrm{d}t = \tfrac{h}{2} \int_0^2 \left(t^2 - t\right) \mathrm{d}t \quad = \tfrac{1}{3} h
\end{aligned}$$

Die erhaltene Quadraturformel

$$Q_{[a,b]}^{(2)}[f] = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

nennt man Simpson-Regel.