Vivek Boddu

Exercise Class 03

Gauss-Quadratur

vivek.boddu@math.ethz.ch

1. Häufige Fehler und Tipps

Nur wenige haben die Serie 2 schon abgegeben, ich empfehle euch die Serien abzugeben (auch wenn das mir mehr Arbeit macht). Falls Ihr etwas aus der Musterlösungen kopiert finde ich das nicht schlimm aber es wäre cool wenn ihr dann diese Aufgaben auch entsprechend markiert. :)
Bei den (wenigen) Serien, die ich gesehen habe gab es Probleme hauptsächlich bei Aufgabe 3 und Aufgabe 4. (Das wird in der Übung besprochen)

2. Gauss-Quadratur

Alle interpolatorischen Quadraturformeln

$$Q_{[a,b]}^{(n)}[f] = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f\left(x_j\right), \quad \text{mit } \alpha_j \int_a^b \ell_j(x)\mathrm{d}x$$

zu $n+1$ verschiedenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ sind nach Konstruktion mindestens von Ordnung $n+1$ (Warum?). In der Vorlesung haben wir gesehen, dass mit geradem $n > 0$ und der Newton-Cotes-Formeln, die Polynome vom Grad $n+1$ exakt integriert werden, also hat erzielt man natürlich eine Ordnung von $n+2$.

We can go higher! Indem man die Stützstellen geschickt wählt, kann man höhere Ordnungen erreichen. Intuitiv vermutet man, dass wir bis zu Ordnung $2n + 2$ erzielen können, da die $n + 1$ Stützstellen und die $n + 1$ Gewichte zusammen $2n + 2$ Freiheitsgrade ergeben. Und das ist in der Tat so; die **Gauss'sche Quadraturformeln** erzielt eine die Maximalordnung $2n + 2$.

Ich überspringe hier die (sehr spannende und insightful!!!) mathematische Herleitung.

Hierzu definieren wir eine Polynomen, nämlich die Legendre-Polynome.

Definition 1. Das **Legendre-Polynom** $q_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ erfüllt

$$\int_{-1}^{1} q_{n+1}(x)h(x)\mathrm{d}x = 0, \forall h \in \mathbb{P}_n, \quad q_{n+1}(1) = 1. \tag{1}$$

Bemerkung. Die Eindeutigkeit ist durch die Bedingung 1, gegeben (probiere das zu zeigen).

Bemerkung. Die Existenz der Legendre-Polynome kann auch konstruktiv mit Gram-Schmidt bezüglich des L_2-Skalarprodukts angewandt auf die Basis $1, x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ nachgewiesen werden.

Beispiel 1. *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= 1 \\
q_1(x) &= x \\
q_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
q_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
q_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Jetzt können wir endlich einen vernünftigen Satz formulieren.

Satz 1. *Seien* $x_0, \dots, x_n \in (-1,1)$ *die Nullstellen des Legendre-Polynoms* q_{n+1} *und* $l_0, \dots, l_n$ *die entsprechende Lagrange-Basis. Setze nun* $\alpha_j = \int_{-1}^{1} l_j(x)\mathrm{d}x$*, dann hat die Gauss'sche Quadraturformel*

$$G_{[-1,1]}^{(n)}[f] = \alpha_0 f(x_0) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

mit $n+1$ *Knoten die Ordnung* $2n+2$*, das heisst sie ist exakt für alle* $f \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

Beispiel 2. *Es gilt: (Rechne das nach!)*

$$\begin{aligned} G_{[-1,1]}^{(1)}[f] &= f(-\sqrt{1/3}) + f(\sqrt{1/3}) \\ G_{[-1,1]}^{(2)}[f] &= \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})\right) \end{aligned}$$

Bemerkung. Probiere zu zeigen, dass die Gewichte $\alpha_j^{(n)}$ immer positiv (also > 0) sind. Du kannst o.B.d.A annehmen, dass $[a,b] = [-1,1]$. (Wieso?)