1. Häufige Fehler und Tipps

Nur halb so viele haben die Serie 3 schon abgegeben, verglichen mit Serie 2. Ich empfehle euch die Serien auszuarbeiten und abzugeben (auch wenn das mir mehr Arbeit macht).
Es gab keine Fehler in den Serien, die ich gesehen habe. Good job!
Tipp:

1. Beachte die Dreiecksungleichung: $|f-g| = |f-h+h-g| \leq |f-h| + |h-g|$

2. Adaptive Quadratur

Die Idee hinter der Adaptiven Quadratur, ist es die Intervalle so zu wählen, dass man unnötige Stützpunkte vermeidet. Also für *flache* Stellen, nehmen wir grössere Intervalle und an Stellen wo "viel Bewegung los ist", nehmen wir kleine Intervalle. (Draw fig.)

Algorithm 1: Adaptive Quadratur

def `integriere(`f, a, b, ε`):`
  $Q \leftarrow Q_{[a,b]}[f]$
  $Q' \leftarrow Q_{[a,\frac{a+b}{2}]}[f] + Q_{[\frac{a+b}{2},b]}$
  if $|Q - Q'| > \varepsilon$ **then**
    m = $\frac{a+b}{2}$
    return `integriere` (f, a, m, $\frac{\varepsilon}{2}$)+`integriere` (f, m, b, $\frac{\varepsilon}{2}$)
  else
    return Q'
  return

3. Zwei-dimensionale Quadratur

In der Praxis arbeitet man im Grunde mit hoch-dimensionale Räume $\mathbb{R}^d$ und nicht immer mit $d = 1$. Wie wir das beim ein-dimensionalen Integral gemacht haben, reduzieren wir uns unsere Integrale auf einem Standardgebiet, z.B. den Einheitswürfel. Wir schauen uns den Einheitsquadrat an.
Wir betrachten

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Sei Q_m eine Quadraturformel für $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. Also

$$Q_m[g] = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i g(x_i)$$

Bezeichnen wir das eindimensionale Integral von 1 mit

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

so erhalten wir mit der Anwendung von Q_m in x - und y -Richtung die folgende Produkt-Quadratur-regel $Q_{[0,1]\times[0,1]}^{(m\times m)}[f]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 F(y)\mathrm{d}y &\approx \sum_{j=0}^{m} \alpha_j F\left(x_j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \int_0^1 f\left(x, x_j\right) \mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f\left(x_i, x_j\right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{m} \alpha_i \alpha_j f\left(x_i, x_j\right) =: Q_{m\times m}[f]
\end{aligned}$$

Bemerkung. Für den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^d$ erhält man mit obiger Strategie m^d aufzusummierende Terme, der Aufwand wächst also **sehr schnell** mit der Dimension d. Diesem "Curse of dimensionality" kann man (zum Beispiel) mit der Monte-Carlo-Integration oder mit Sparse Grids countern (queue *Pirates Of The Caribean* theme song). Letztere sind auf eine mit d wachsende Glattheit von f angewiesen.