1. Häufige Fehler und Tipps

Wir besprechen die Aufgabe 3a) der Serie 4.
Ab jetzt kommen die Lösungen der Serien am Freitag Nachmittag raus.

2. Reduktion auf ein System erster Ordnung

Falls wir mit Differential Gleichungen höheren Ordnung arbeiten kann man die gleichen Methoden gebrauchen wie bei DGLs erster Ordnung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ein DGL von Ordnung n eine Gleichung der Form:

$$F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}(t)\right) = 0$$

wobei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion und $dx(t)/dt, \ldots, d^n x(t)/dt^n$ die Ableitungen sind. Wir nennen $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$ eine Lösung der DGL falls I ein offenes Intervall ist,

$$\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n \varphi}{dt^n}(t)\right) \in \Omega$$

für alle $t \in I$, und

$$F\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n \varphi}{dt^n}(t)\right) = 0$$

für alle $t \in I$. Falls jetzt x eine Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist, i.e., $x(t) \in \mathbb{R}^d$, dann $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$.
Nun betrachten wir DGLs der Ordnung n:

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \quad t \in I \tag{1}$$

wobei $x(t) \in \mathbb{R}^d$ und $f : I \times \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{R}^d$. Um eine Eindeutigkeit der Lösung zu finden, müssen wir 1 argumentieren mit den Anfangswertbedingungen:

$$\left(x\left(t_0\right), x'\left(t_0\right), x''\left(t_0\right), \ldots, x^{(n-1)}\left(t_0\right)\right)^\top$$

Wir können jetzt DGL hoher Ordnung 1 auf eine DGL erster Ordnung reduzieren. Wir definieren:

$$y(t) := \left(x(t), dx(t)/dt, \ldots, d^{n-1}x(t)/dt^{n-1}\right)^\top \in \mathbb{R}^{nd}$$

und

$$F(t, y) := \left(y_2, \ldots, y_n, f\left(t, y_1, \ldots, y_n\right)\right)^\top$$

für $y = \left(y_1, \ldots, y_n\right)^\top \in \mathbb{R}^{nd}$ und $y_i \in \mathbb{R}^d$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist die DGL n-ter Ordnung 1 äquivalent zu der DGL:

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y(t)).$$

Beispiel 1. *Betrachte die DGL von zweiter Ordnung gegeben durch:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x(t) = g(t)$$

Dann haben wir

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ -p(t)\frac{dx}{dt} - q(t)x(t) + g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Die (Haupt-)Probleme der ODEs sind:

- Existenz der Lösung
- Eindeutigkeit der Lösung mit gegebenen Anfangsbedingungen
- Regularität und Stabilität der Lösungen
- Berechnung von Lösungen

Bemerkung. Die Existenz der Lösung, kann zum Beispiel mittels Fixpunktsatz von Banach, Satz von der impliziten Funktion, oder auch generell mit Methoden aus der Funktional Analysis gezweigt werden. Das Problem der Eindeutigkeit ist jedoch typischerweise schwieriger. Nur in wenigen Fällen kann man eigentlich die Lösung explizit hinschreiben oder berechnen.

Satz 1 (Cauchy-Lipschitz theorem)**.** *Betrachte das Anfangswert-Problem:*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \quad t \in [0,T] \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2}$$

Falls $f \in \mathcal{C}^0\left(I \times \mathbb{R}^d\right)$ *die Lipschitz-Bedingung erfüllt auf* $[0,T]$, *dann existiert eine eindeutige Lösung* $x \in \mathcal{C}^1(I)$ *zu* 2 *auf* $[0,T]$.

Beweis. We have

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0,T]$$

Define the functional $F : \mathcal{C}^0\left([0,T];\mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{C}^0\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ by

$$F(y) := x_0 + \int_0^t f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

For $y \in \mathcal{C}^0\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$, defined the norm of y by

$$\|y\| := \sup_{t\in[0,T]}\left\{|y(t)|e^{-C_f t}\right\} \tag{3}$$

where C_f is the Lipschitz constant for f. It is easy to prove that 3 is equivalent to the usual norm $\sup_{t\in[0,T]} |y(t)|$ and hence, $\mathcal{C}^0\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ equipped with 3 is complete. With 3, we compute

$$\begin{aligned}
\|F[y_1] - F[y_2]\| &= \sup_{t\in[0,T]} |F[y_1](t) - F[y_2](t)| \, e^{-C_f t} \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} e^{-C_f t} \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \,\mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} e^{-C_f t} C_f \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)| \,\mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} e^{-C_f t} C_f \int_0^t e^{C_f s} e^{-C_f s} |y_1(s) - y_2(s)| \,\mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \left\{ e^{-C_f t} C_f \int_0^t e^{C_f s} \,\mathrm{d}s \right\} \|y_1 - y_2\| \\
&\leq \left(1 - e^{-C_f T}\right) \|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

By Banach fixed point theorem in a complete metric space, there exists a unique $y \in \mathcal{C}^0\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ such that $F(y) = y$. The Picard iteration

$$y^{(n+1)} = F\left[y^{(n)}\right]$$

is a Cauchy sequence and converges to the unique fixed point y. Therefore, there exists a unique solution to 2 . $\square$