Vivek Boddu
vivek.boddu@math.ethz.ch

Konsistenz von RK Methoden

1. Häufige Fehler und Tipps

Bei der Serie 6, (Abgabe 23. April) gab es Probleme bei der ersten und zweiten Aufgabe. Wir werden beide Aufgaben in der Übung anschauen, denn Vieles wird auf diese Grundlagen aufgebaut.
Macht die Serien! ♡
Tipps:

(i) Um Lipschitzstetigkeit auf einem Intervall zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass die Ableitung im Intervall beschränkt ist.

(ii) Serie 7 ist nicht so *schwer* wie andere Serien und kann unabhängig vom Stoff vorheriger Lektionen gelöst werden. Also probiert die doch aus. (Die Notizen von letzter Woche könnten hilfreich sein)

2. Recap

Wir definieren ein s-stufiges Runge-Kutta Verfahren als

$$y^{j+1} = y^j + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i = y^j + h\phi(t_j, y_j, h),$$

wobei die Stufen $k_i = f(t_j + c_i h, y_j + h\sum_{l=1}^{s} a_{i,l}k_l)$ sind.
Die Methoden die wir bisher gesehen haben sind alle *one-step* Runge-Kutta Methoden. Die generelle n-*step* Methoden sind von der Form.

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y^{k+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(t_{k+1}, y^{k+j}),$$

wobei α_j, β_j reelle Konstanten sind und $\alpha_n \neq 0$.
$\beta_n = 0$: **explizit.**
$\beta_n \neq 0$: **implizit.**

3. Definitionen

Definition 1. Der *globale Diskretisierungsfehler (GDF)* zur Zeit t_j ist definiert durch

$$E_j = y(t_j) - y^j.$$

Definition 2. Der *lokale Diskretisierungsfeheler (LDF)* zur Zeit t_j ist definiert durch

$$e_j = y(t_j) - [y(t_j) + h\phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h)].$$

Definition 3. Ein Einschrittverfahren heisst **konvergent** von der Ordnung p (*KO* p), falls

$$E := \max_{j=0,\ldots,N} |y(t_j) - y^j| = \mathcal{O}(h^p), \quad h \to 0.$$

Bemerkung. Wir schreiben $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, für $x \to a$, falls

$$\limsup_{x\to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty.$$

Definition 4. Der *Konsistenzfehler (KF)* zur Zeit t_j ist definiert durch

$$\tau_j = \frac{e_j}{h} = \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{h} - \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h).$$

Definition 5. Ein Einschrittverfahren heisst **konsistent** von der Ordnung p, falls

$$\tau := \max_{j=0,\dots,N} |\tau_j| = \mathcal{O}(h^p), \quad h \to 0.$$

Die Konsistenz beschäftigt sich nun mit der Frage, was passiert, wenn die exakte Lösung im numerischen Verfahren verarbeitet wird. Also ob der Algorithmus tatsächlich das gegebene Problem löst und nicht ein anderes [1]. Jetzt stellt sich aber die Frage wie man die Konsistenz und die Ordnung der Konsistenz überprüft/berechnet. Dazu kann der folgende Satz von Nutzen sein.

Satz 1. *Eine RK Methode ist konsistent genau dann wenn* $\sum_k b_k = 1$

Um die genaue Ordnung zu bestimmen müssen wir mehr Mühe geben. Bei vielen Aufgaben kann man folgendes Schema folgen.

1. Überprüft $\sum_k b_k = 1$
2. Entwickle ϕ und $y(t+h)$ in ihre Taylorreihen (bei $h = 0$).
3. ???
4. profit

Bemerkung. Sehr oft wendet man einfach Taylor und sieht es direkt aber manchmal muss man gewisse Modifikationen oder Tricks anwenden.
Achtung: Taylor kann sehr schnell sehr mühsam werden.

Literatur

[1] Wikipedia. *Konsistenz (Numerik) — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. [Online; Stand 22. April 2021]. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Konsistenz_(Numerik)&oldid=181757230.