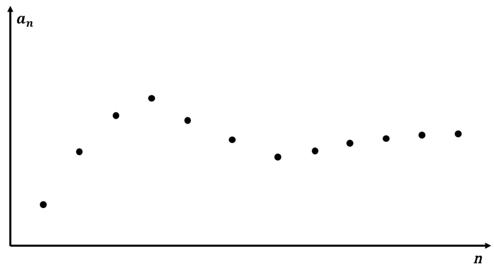
Folgen und Reihen

Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ in die Menge der (zumindest in den meisten Fällen) reellen Zahlen $\mathbb{R}$. In diesem Fall kann man sich eine Folge als Punkte in einem Koordinatensystem vorstellen.

$$\begin{array}{c} 1 \to a_1 \\ 2 \to a_2 \\ 3 \to a_3 \\ \vdots \\ n \to a_n \end{array}$$



Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine Folge zu definieren. Die zwei häufigsten Methoden sind

Explizit: Man drückt die einzelnen Folgen - Glieder mit Hilfe einer Formel aus, z.B. $a_n = \frac{1}{n} \to \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

Rekursiv: Man gibt die ersten paar Folgen - Glieder und eine Vorschrift um damit das nächste Glied zu bilden vor, z.B. die bekannte Fibonacci Folge kann rekursiv definiert werden $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

Eine häufige Aufgabenstellung ist es, eine gegebene Folge auf verschiedene Eigenschaften zu untersuchen. Dazu benötigen wir die folgenden Definitionen!
Eine Folge heisst…

Beschränktheit
…nach oben beschränkt, falls $\exists S_o \in \mathbb{R}$, sodass $a_n \leq S_o \quad \forall_n$.
…nach unten beschränkt, falls $\exists S_u \in \mathbb{R}$, sodass $a_n \geq S_u \quad \forall_n$
…beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Der Nachweis, dass eine Folge beschränkt ist, ist nicht immer straight forward. Manchmal kann man die obige Ungleichung direkt lösen, manchmal kann man vollständige Induktion verwenden, aber es gibt leider kein allgemein gültiges Vorgehen.

Monotonie
…(strikt) monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$
…(strikt) monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$

Monotonie lässt sich meist einfach prüfen. Man kann versuchen die Ungleichung in eine wahre Aussage umzuformen. Eine andere Möglichkeit ist es den Index n kurz als kontinuierlich anzunehmen und danach abzuleiten. $\frac{d}{dn}a_n > 0 \to$ strikt monoton wachsend, usw.

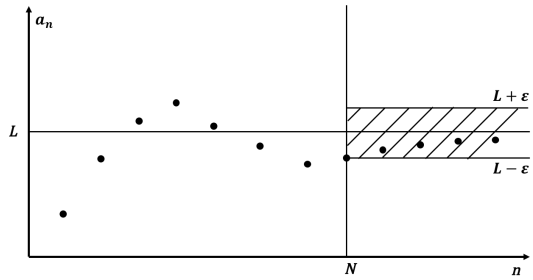
Konvergenz
Eine Folge konvergiert gegen den Grenzwert L, wenn es für jedes noch so kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_n - L| \leq \varepsilon, \quad n \geq N$$

Falls die Folge konvergiert, schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Ist $L = 0$, so heisst die Folge *Nullfolge*.



Divergenz
Eine Folge, die nicht konvergiert, heisst divergent. Das bedeutet allerdings nicht, dass die Folge gegen $\pm\infty$ strebt. So nennt man auch die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ divergent.

Sätze

1. Eine beschränkte & monoton wachsende/fallende Folge ist immer konvergent!

$$\textit{Monoton} + \textit{Beschränkt} \Rightarrow \textit{Konvergenz}$$

2. Eine konvergente Folge ist nicht zwingend monoton. Die Folge kann sich von beiden Seiten dem Grenzwert nähern, z.B. $a_n = e^{-n} \cdot \cos(10n)$
3. Eine konvergente Folge ist aber immer beschränkt.

Rechenregeln für den Grenzwert

Sei $a_n = L_a(n \to \infty)$ & $b_n = L_b(n \to \infty)$ & $c \in \mathbb{R}$ dann

$$\lim_{n\to\infty} c \pm a_n = c \pm L_a \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = L_a \pm L_b$$
$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot L_a \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = L_a \cdot L_b$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{a_n} = \frac{c}{L_a} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$$

Ausserdem gilt für stetige Funktionen $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L_a)$
Tipps zur Berechnung:

1. Bei Brüchen Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz von n teilen.
2. Bei Wurzel - Ausdrücken erweitern und binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ verwenden.
3. Bei rekursiv definiert Folgen gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$
4. Folgende Ergebnisse sind *unentscheidbar:*

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad 0^0 \quad 0 \cdot \infty$$

Beispiel 1:
Berechne die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$

1. $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$
2. $a_n = \sqrt{n^2+5n+3} - n$
3. $a_1 = \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$

I.
Wir erweitern den Bruch mit $\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

II.
Wir erweitern mit $\sqrt{n^2+5n+3} + n$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+5n+3} - n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5n+3} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+5n+3}+n}{\sqrt{n^2+5n+3}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+3-n^2}{\sqrt{n^2+5n+3}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{\sqrt{n^2+5n+3}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

III.
Wir bezeichnen den gesuchten Grenzwert mit x. Dann gilt wegen der Rekursionsformel der Folge

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} \\
x &= \sqrt{2+x} \\
x^2 &= 2+x \\
0 &= x^2-x-2 \\
x &= \{-1, 2\}
\end{aligned}$$

Da alle Folgen - Glieder grösser Null sind, muss auch der Grenzwert grösser Null sein und damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

Beispiel 2:
Untersuche die Folge $\frac{n}{n^2+1}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

Monotonie:
Wir ersetzen die diskrete Variable n kurz durch die kontinuierliche Variable $x > 0$ und bilden die Ableitung.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} &\leq 0 \\ 1-x^2 &\leq 0 \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$

ist die Folge für $n > 1$ monoton fallend!

Konvergenz:
Offensichtlich dominiert der Nenner dieser Folge für grosse n. Der Grenzwert ist 0.

Beschränktheit:
Da die Folge konvergiert, muss sie beschränkt sein. Wir können zum Beispiel prüfen, ob es sich bei dem Wert 1 um eine obere Schranke handelt

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+1} &< 1 \\ n &< n^2+1 \\ 0 &< n^2-n+1 \\ 0 &< \left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} &< \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist in jedem Fall erfüllt, da die rechte Seite stets positiv ist!

Reihen

Ist eine beliebige Folge a_n gegeben, so kann man aus ihr die sogenannten Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ bilden. Die neue Folge s_n heisst Reihe. Falls die Reihe konvergiert, nennt man ihren Grenzwert auch *Wert der Reihe.*

	Folge	**Reihe**
Arithmetisch	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot q$ $n = 1, 2, \ldots$	$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Geometrisch	$a_n = a_0 \cdot q^n$ $n = 0, 1, \ldots$	$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = a_0 \frac{1}{1-q}$, nur für $\lvert q \rvert < 1$
Harmonisch	$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R} \quad n = 0, 1, \ldots$	$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha$ Konvergenz genau dann, falls $\alpha > 1$

Die Euler'sche Zahl:
In diesem Kontext ist noch eine weitere Reihe erwähnenswert. Oft wird damit die Euler'sche Zahl definiert.

$$e = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Äquivalent ist die Definition $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Beispiel 3:
Berechne

$$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + - \ldots$$

Wir erkennen ein Muster

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Um die Formel für die geometrische Reihe verwenden zu dürfen, müssen wir noch die Indizes anpassen.

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2}$$

$$x = 0$$