Integral - Rechnung 2

Recap

Ableitung von Integralen

$$\frac{d}{dx}\int_c^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Bespiel 1 - Zwischenprüfung HS 14:
Berechne:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\log x}, \qquad f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t \cdot \arctan t} dt$$

Hinweis: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Wir verwenden l'Hôpital $\lim_{x\to\infty} \frac{f(g)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \int_1^{x^2} \frac{1}{t \cdot \arctan t} dt &= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x^2 \cdot \arctan(x^2)} \cdot 2x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\arctan(x^2)} = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

Ein Anwendungsbeispiel sind Integrale, bei denen nach mehrfacher Anwendung der partiellen Integration das ursprüngliche Integral wieder auftaucht. Falls dies passiert, nennen wir die Lösung des gesuchten Integrals $\mathcal{I}$ und lösen diese algebraische Gleichung.

Bespiel 2:
Berechne für $n \neq 0$ das Integral $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(nx)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \overset{\downarrow}{e^x} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(nx)}\ dx &= e^x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \overset{\downarrow}{e^x} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(nx)}\ dx \\
&= 0 - \frac{1}{n}\left[e^x \cdot \left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(nx)\,dx\right]
\end{aligned}$$

Jetzt erkennen wir das ursprüngliche Integral wieder und können eine Gleichung für $\mathcal{I}$ schreiben.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= 0 - \frac{1}{n}\left[e^x \cdot \left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\mathcal{I}\right] \\
\mathcal{I} &= e^x \cdot \left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\mathcal{I} \\
\mathcal{I} &= e^x \cdot \left(\frac{\cos(nx)}{1+n^2}\right)\bigg|_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

Substitution

$$x = g(u) \quad dx = g'(u)du \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\,du$$

Ein paar wichtige Substitutionen

Integral	Substitution	Verzerrung
$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$	$x = a\sin(u) \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(u)$	$dx = a\cos(u)\,du$
$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$	$x = a\sinh u \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a\cosh(u)$	$dx = a\cosh(u)du$
$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$	$x = a\cosh u \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh(u)$	$dx = a\sinh(u)du$
$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$	$u = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$	$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$
$\int f(\sinh x, \cosh x)\,dx$	$u = e^x \Rightarrow \sinh(x) = \frac{u^2-1}{2u}, \cosh(x) = \frac{u^2+1}{2u}$	$dx = \frac{1}{u}du$

Bespiel 3:
Berechne

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

Zuerst substituieren wir: $x = \sin(t) \quad dx = \cos(t)\,dt$. Damit

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int \frac{1}{\sin(t)}\,dt$$

Eine zweite Substitution $u = \tan(\frac{t}{2})$ gibt $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $dt = \frac{2}{1+u^2}du$

$$\int \frac{1}{\sin(t)}\,dt = \int \frac{1+u^2}{2u} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \log(u) + C$$

Jetzt müssen wir nur noch rücksubstituieren.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \log(u) + C = \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + C = \log\left(\tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)\right) + C$$

PBZ

1. Zähler hat höheren Grad als der Nenner? $\rightarrow$ Polynomdivision & PBZ für Rest
2. Finde die Nullstellen des Nennerpolynoms und zerlege in Linear - Faktoren

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots$$

   Vorsicht: Höchste Potenz vom Nenner hat am besten den Koeffizienten 1
3. Mache einen passenden Ansatz für jeden Linear - Faktor
4. Lösen durch Koeffizientenvergleich

Die Ansätze hängen von den Nullstellen ab

1. Einfache NS: $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$
2. Mehrfache NS: $\frac{1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$
3. Komplexe NS: $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$

Bespiel 4:
Berechne:

$$\int \frac{2x^2+12x+11}{(x^2+4x+5)(4x+1)}\,dx$$

Das Nennerpolynom ist schon passend zerlegt, wir können also direkt den Ansatz schreiben

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+12x+11}{(x^2+4x+5)(4x+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+4x+5}+\frac{C}{4x+1}\\ &= \frac{(Ax+B)(4x+1)+C(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)(4x+1)}\\ 2x^2+12x+11 &= x^2(4A+C)+x(A+4B+4C)+B+5\end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für alle x gelten und deswegen können wir einen Koeffizientenvergleich machen

$$\begin{aligned}x^2:&\quad 4A+C &&=2\\ x:&\quad A+4B+4C&&=12\\ 1:&\quad B+5&&=11\end{aligned}$$

Dieses LGS hat die Lösung $A=0, B=1, C=2$. Damit können wir unser Integral schreiben als

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+12x+11}{(x^2+4x+5)(4x+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+4x+5}+\frac{2}{4x+1}\,dx\\ &= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}+\frac{2}{4x+1}\,dx\\ &= \arctan(x+2)+\frac{1}{2}\log(4x+1)+C\end{aligned}$$

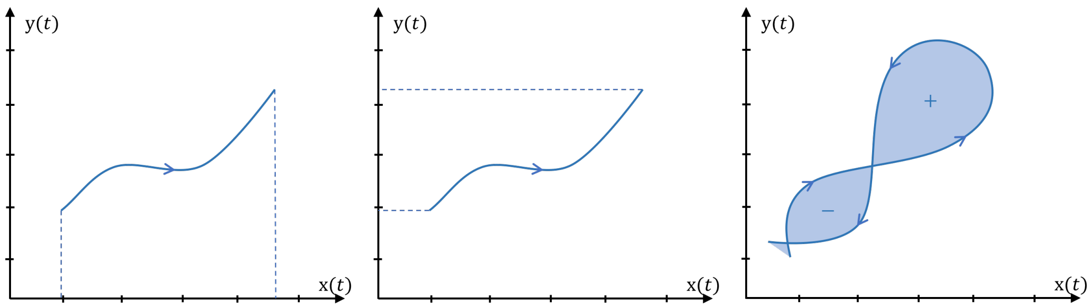
Flächenberechnung

Sei $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ die Parametrisierung einer Kurve und $\rho=\rho(\varphi)$ die Kurve in Polarkoordinaten.

Fläche zur x - Achse: $F_x=\int_a^b y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt$

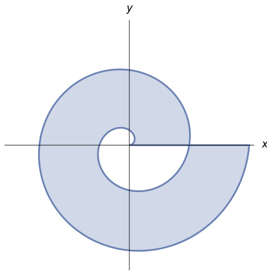
Fläche zur y - Achse: $F_y=\int_a^b x(t)\cdot\dot{y}(t)\,dt$

Sektorfläche (pos. falls links): $F_S=\frac{1}{2}\int(x\dot{y}-\dot{x}y)\,dt=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$



Bespiel 4:

Gegeben sei die Spirale in Polarkoordinaten $\rho = \varphi$. Bestimme die Skizzierte Fläche F!



Wir betrachten F als Differenz $F = F_2 - F_1$, wobei F_1 die Sektorfläche zwischen $[0, 2\pi]$ bezeichnet, F_2 die Fläche zwischen $[2\pi, 4\pi]$

Mit obiger Formel gilt

$$\begin{aligned} F &= F_2 - F_1 \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{2\pi}^{4\pi} \varphi^2 \, d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[\varphi^3\Big|_{2\pi}^{4\pi} - \varphi^3\Big|_0^{2\pi}\right] \\ &= \frac{\pi^3}{6}\Big[64 - 8 - 8 + 0\Big] \\ &= 8\pi^3 \end{aligned}$$

Bogenlänge

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}_{(t)}| \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} \, d\varphi$$

Bespiel 5:
Berechne die Bogenlänge der Spirale K, mit der Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} \cos(t) \\ e^{-\sqrt{2}t} \sin(t)) \end{pmatrix}$$

Wir benötigen den Betrag des Tangentialvektoren

$$\dot{\vec{r}}_{(t)} = \begin{pmatrix} -e^{-\sqrt{2}t}[\sqrt{2}\cos(t) + \sin(t)] \\ e^{-\sqrt{2}t}[\cos(t) - \sqrt{2}\sin(t)] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}_{(t)}| &= e^{-\sqrt{2}t} \cdot \sqrt{2\cos^2(t) + 2\sqrt{2}\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) - 2\sqrt{2}\sin(t)\cos(t) + 2\sin^2(t)} \\ &= e^{-\sqrt{2}t}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$s = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\sqrt{3} \, dt = -\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{2}t}\Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{3}{2}}$$