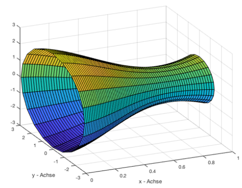
Integral - Rechnung 3

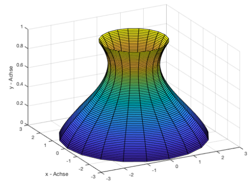
Volumenberechnung für Rotationskörper

1. Rotation um x - Achse (Inneres Volumen)



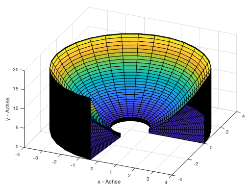
$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx = \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \dot{x}(t) \, dt$$

2. Rotation um y - Achse (Inneres Volumen)



$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)^2 \, dy = \pi \int_a^b x^2 \cdot f'(x)^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 \dot{y}(t) \, dt$$

3. Rotation um y - Achse (Äusseres Volumen)



$$V_y^A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x) \, dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y(t) \cdot \dot{x}(t) \, dt$$

4. Querschnittsfläche $F(x)$

$$V = \int_a^b F(x) \, dx$$

Bespiel 1:
Sei für $\alpha > 0$

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^\alpha\}$$

Es bezeichne V_x bzw. V_y das Volumen des Körpers der durch Rotation von B_α um die x - Achse, respektive um die y - Achse entsteht. Man finde den Wertebereich der Funktion $\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)}$.

$$V_x = \pi \int_0^1 x^{2\alpha} \, dx = \frac{\pi}{2\alpha + 1}$$

Mit einer Skizze sieht man gut, dass gelten muss

$$V_x(1/\alpha) + V_y(\alpha) = \pi$$

womit folgt, dass

$$V_y(\alpha) = \pi - \frac{\pi\alpha}{2 + \alpha} = \pi \frac{2}{2 + \alpha}$$

Es gilt also für das Verhältnis

$$\frac{V_x}{V_y} = \frac{2+\alpha}{4\alpha+2}$$

Um den Wertebereich zu bestimmen benötigen wir die Extremwerte. Wegen

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{2+\alpha}{4\alpha+2}\right) = \frac{4\alpha+2-4(2+\alpha)}{(4\alpha+2)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$-8 = 0$$

gibt es keine lokalen Maxima. Wir untersuchen die Randpunkte

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2+\alpha}{4\alpha+2} = 1$$

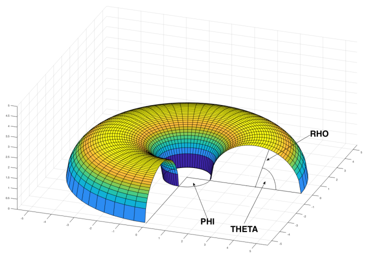
$$\lim_{\alpha\to \infty}\frac{2+\alpha}{4\alpha+2} = \frac{1}{4}$$

Da die Funktion stetig ist gilt der Zwischenwertsatz undder Wertebereich ist

$$W_f\left(\frac{V_x}{V_y}\right) = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

Bespiel 2:

Berechne das Volumen eines Torus (Donut) mit grossem Radius R & kleinem Radius r.



Der Torus entspricht dem äusseren Volumen eines Kreises mit Mittelpunkt in $(R, 0)$ und Radius r, der um die y - Achse gedreht wird.

1. Variante - Explizite Funktion

Der Kreis hat die implizite Funktion $(x-R)^2 + y^2 = r^2$. Wir nutzen Symmetrie und nehmen nur die positive Hälfte.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{r^2-(x-R)^2} \\
V_T = 2V_y^A &= 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2-(x-R^2)}\,dx \qquad \text{Subst.: } u = x-R \\
&= 4\pi \int_{-r}^{r} (u+R)\sqrt{r^2-u^2}\,du \\
&= 4\pi \left[\int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}\,du + \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2-u^2}\right] \\
&= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-r}^{r} + \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2-u^2}\right] \qquad \text{Subst.: } u = r\sin t, du = r\cos t\,dt \\
&= 4\pi \int_0^{\pi} Rr^2\cos^2(t)\,dt = 4\pi Rr^2 \cdot \frac{1}{2}\left(t+\sin(t)\cos(t)\Big|_0^{\pi}\right) = 2\pi^2 r^2 R
\end{aligned}$$

2. Variante - Parametrisierung
Der Kreis hat die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (R + r\cos(t), r\sin(t))$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$$

Wieder mittels Symmetrie

$$\begin{aligned}
V_T = 2V_y^A &= 4\pi \int_0^{\pi} (R + r\cos(t)) \cdot r\sin(t)(-r)\sin(t)\,dt \\
&= -4\pi \int_0^{\pi} (Rr^2\sin^2(t) + r^3\sin^2(t)\cos(t))\,dt \\
&= -4\pi \left[Rr^2 \frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t)) + \frac{1}{3}r^3\sin^3(t) \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= -2\pi^2 r^2 R
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist hier negativ, weil $\dot{x}(t) < 0$. Wir nehmen für das Volumen einfach den Betrag $V_T = 2\pi^2 Rr^2$

Mantelflächen für Rotationskörper

1. Rotation um die x - Achse

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

2. Rotation um die y - Achse

$$M_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

3. Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$ Diese Formel kann man sich leicht aus der Formel für die Parameterdarstellung herleiten. Bei gegebener Polardarstellung, ist eine Parametrisierung

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(\varphi)\cos(\varphi) \\ \rho(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

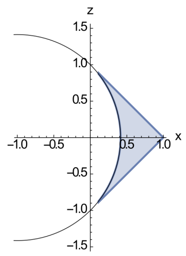
$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi) \\ \dot{\rho}\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$M_x = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\sin(\varphi)\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\,d\varphi$$

$$M_y = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos(\varphi)\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\,d\varphi$$

Bespiel 3:

Berechne das Volumen das entsteht, wenn das markierte Gebiet um die z - Achse rotiert, sowie die Oberfläche der Hohlraums.



I. Volumen

Wir betrachten das Volumen als Differenz $V = V_P - V_H$

$$
\begin{aligned}
V_P &= 2 \cdot \frac{\pi}{3} \qquad \text{Formel für den Drehkegel} \\
V_H &= 2 \cdot \pi \int_0^1 f(z)^2\, dz, \qquad (x+1)^2 + z^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2 - z^2} - 1 \\
&= 2\pi \int_0^1 (2 - z^2 - 2\sqrt{2 - z^2} + 1)\, dz \qquad z = \sqrt{2}\sin(t) \\
&= 2\pi \left[3 - \frac{1}{3} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\, dt \right] = 2\pi \left[3 - \frac{1}{3} - 2(t - \sin(t)\cos(t)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \\
&= 2\pi(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2} - 1) = \frac{10\pi}{3} - \pi^2 \\
V &= \frac{2\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} + \pi^2 = \pi^2 - \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

II. Oberfläche

Eine Parametrisierung des Kreises ist $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos(t) - 1, \sqrt{2}\sin(t))$

$$
M_z = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}\cos(t) - 1)\sqrt{2}\, dt = 4\pi(2\sin(t) - \sqrt{2}t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\pi(1 - \frac{\pi}{4})
$$