Potenz - Reihen

Manchmal ist es praktisch eine Funktion $f(x)$ mir Hilfe ihrer Potenzreihe auszudrücken. Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 sieht im Allgemeinen so aus

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

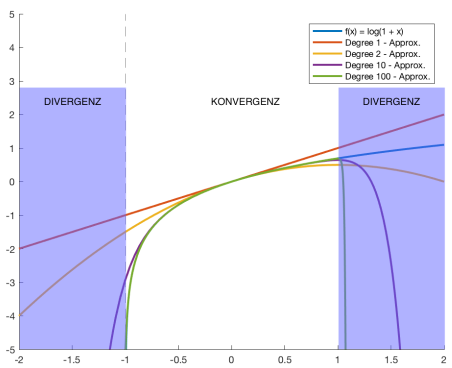
Funktionen, für die eine Potenzreihe existiert, heissen analytisch. Falls sie existiert, dann ist die Potenzreihe eindeutig.

Rechenregeln:
Für Potenzreihen gelten dieselben Rechenregeln, wie für Polynome endlichen Grades. D.h. es wird gliedweise addiert, subtrahiert, abgeleitet & integriert. Multiplikation und Division passiert nach dem Distributiv - Gesetz.

Konvergenzradius

Es kommt oft vor, dass die Funktion nur für ein gewisses Intervall $x \in \mathcal{I}$ durch ihre Potenzreihe ersetzt werden darf. Dieses Intervall ist immer symmetrisch um den Entwicklungspunkt, man kann es also mit Hilfe eines sogenannten Konvergenzradius r definieren

$$\mathcal{I} := \{x \in \mathbb{R} \big| |x - x_0| < r\}$$



Das Bild zeigt die Funktion

$$f(x) = \log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n$$

die für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Konvergenzradius $r = 1$ aufweist. Ausserdem sieht man die Potenzreihe, bis zu verschiedenen Ordnungen, d.h.

$$\begin{aligned} p_1 &= x \\ p_2 &= x - \frac{1}{2}x^2 \\ p_{10} &= x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots - \frac{1}{10}x^{10} \end{aligned}$$

Berechnung:
Die zwei häufigsten Methoden zur Berechnung des Konvergenzradius einer Potenzreihe Reihe $\sum a_n(x-x_0)^n$ sind das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bespiel 1:
Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$$

Auf welchem Intervall konvergiert die Reihe?

Wir berechnen gemäss dem Quotientenkriterium, den Radius

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Das Konvergenzintervall ist also symmetrisch um den Entwicklungspunkt $x_0 = (-3)$

$$\mathcal{I} = \left(-3-\frac{1}{2}, -3+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

Genau genommen, müssten wir jetzt noch die Randpunkte des Intervalls untersuchen - über die man im Allgemeinen keine Aussage treffen kann.

Bespiel 2:
Berechne den Konvergenzradius von

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}$$

Wir dürfen hier nicht direkt das Quotientenkriterium anwenden, sonder müssen zuerst substituieren.

$$y = x^2$$

Damit erhalten wir die Potenzreihe $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} y^n$. Diese besitzt die korrekte Form. Gemäss der Definition des Binomial - Koeffizienten gilt

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\frac{(n+1)!\cdot(n+1)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4}$$

Mittels Rücksubstitution folgt für die Variable x der Konvergenzbereich

$$|x| = |\sqrt{y}| < \frac{1}{2}$$

Bestimmung der Potenzreihe

WICHTIG:
Bevor man irgendetwas rechnet: Prüfe ob es sich um eine gerade bzw. ungerade Funktion handelt!

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{"gerade"} && \rightarrow && a_{\text{ungerade}} = 0 \\ f(x) &= \text{"ungerade"} && \rightarrow && a_{\text{gerade}} = 0 \end{aligned}$$

1. Taylor - Reihen - Entwicklung
Das n-te Taylor - Polynom einer Funktion lautet

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Für $N \to \infty$ erhält man daraus die Potenzreihe.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Diese Methode sieht auf den ersten Blick vielleicht einfach aus, weil es eine schöne Formel gibt, ist aber in der Realität wegen der vielen Ableitungen ziemlich mühsam!
Anwendung: Wenn die Ableitungen einfach sind! (Trigo - Funktionen)

Bespiel 3:
Bestimme die Potenzreihe um $x_0 = 0$ von

$$f(x) = \sin^2(x)$$

Zuerst untersuchen wir, ob es sich um eine gerade/ungerade Funktion handelt. Es gilt

$$f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = f(x)$$

Damit ist die Funktion gerade und wir erwarten $a_{2n+1} = 0$
Für die Formel nach Taylor benötigen wir alle Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2(x) && \rightarrow && f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 2\sin\cos(x) && \rightarrow && f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) && \rightarrow && f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= (-2)(2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = (-4)f''(x) && \rightarrow && f''''(0) &= 0 \\ f''''(x) &= (-4)f''(x) && \rightarrow && f''''(0) &= -8 \end{aligned}$$

Man sieht, dass für $n > 3$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-4) \cdot f^{(n-2)}(x)$ und wir können schreiben

$$f(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 + \frac{32}{6!}x^3 - + \ldots$$

Mit etwas Gefühl erkennt man das allgemeine Muster

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n}$$

2. Koeffizienten - Vergleich
Das ist definitiv die effizienteste Methode, falls man nur die ersten paar Koeffizienten der Reihe bestimmen muss! Das Vorgehen demonstriert man am besten an einem Beispiel!

Bespiel 4:
Bestimme die ersten 4 Koeffizienten der Potenzreihe für

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x}$$

Aus einer Tabelle finden wir die bekannten Potenzreihen

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - + \dots \end{aligned}$$

Wir machen jetzt den typischen Ansatz für die Potenzreihe - und nehmen gleichzeitig die Exponentialfunktion auf die linke Seite

$$\begin{aligned} e^x[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots] &= \sin(2x) \\ [1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots][a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots] &= [2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + - \dots] \\ a_0 + (a_0 + a_1)x + (\frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Jetzt liefert ein Koeffizienten - Vergleich

$$\begin{aligned} 1: &\quad a_0 &&= 0 \\ x: &\quad a_0 + a_1 &&= 2 \\ x^2: &\quad \frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 &&= 0 \\ x^3: &\quad \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_3 &&= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Es folgt $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = -2, a_3 = -\frac{1}{3}$ und wir haben die ersten Terme der Potenzreihe gefunden

$$f(x) \approx 2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

3. Bekannte Potenzreihe umformen

Bespiel 5:
Bekannt ist die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Bestimme (mit PBZ) die Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

Mit etwas Überlegen sieht man, dass

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{-x}{3}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{3})^n$$

Wichtige Potenzreihen

Folgende Potenzreihen sind mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzradius
$f(x) = \frac{a}{a-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = (1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \dots)$	$-\lvert a \rvert < x < \lvert a \rvert$
$f(x) = \frac{a^2}{(x-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \left(\frac{x}{a}\right)^n = (1 + 2\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} + \dots)$	$-\lvert a \rvert < x < \lvert a \rvert$
$f(x) = (1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$	$\lvert x \rvert < 1$
$f(x) = \log(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$	$\lvert x \rvert < 1$
$f(x) = e^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$x \in \mathbb{R}$