Funktionen I

Eine Funktion (Abbildung) ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Menge A ein Element einer Menge B zuweist. In Zeichen $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.
Sehr vieles stellt in diesem weiten Sinn eine Funktion dar. Etwa kann man jedes System, das ein Eingangs - Signal empfängt und ein verarbeitetes Signal abgibt, als Funktion betrachten, z.B. ein Röntgen - Gerät, das Photonen (Eingang) detektiert und ein Bild (Ausgang) produziert. Für den Anfang betrachten wir den Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Argument x:	Element der Menge A, an der die Funktion ausgewertet wird
Funktionswert $f(x)$:	Dasjenige Element der Menge B, das dem entsprechenden Argument zugewiesen wird
Definitionsbereich:	Die Menge A. (auch: *domain*)
Zielbereich:	Die Menge B. (auch: *range*)
Wertebereich:	Die Teilmenge von B, die auch tatsächlich "getroffen" wird. (auch: *image*)

Beispiel 1:
Untersuche das Monotonie - Verhalten der Funktion $f : x \mapsto f(x), \quad f(x) = |x| \cdot x$

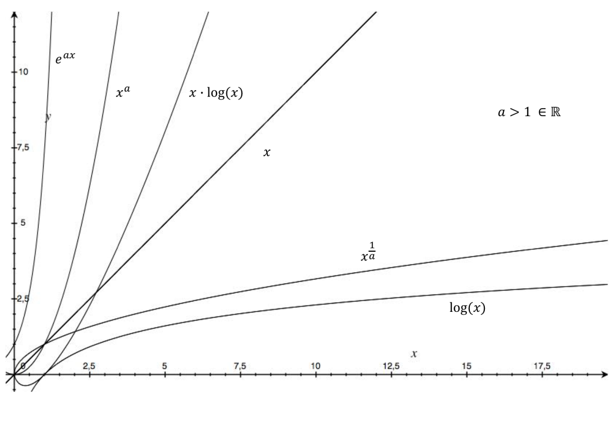
Wir unterteilen die Funktion in zwei Bereiche, um den Betrag los zu werden und bilden die Ableitung

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 2x & , x > 0 \end{cases}$$

Damit ist klar, dass $\frac{d}{dx} f(x) \geq 0 \quad \forall_x$ und die Funktion monoton wachsend ist.

Elementare Funktionen

1. Potenz - Funktionen $f : x \mapsto x^n \qquad n \in \mathbb{R}$
2. Exponential - Funktionen $f : x \mapsto a^x \qquad a > 1$
3. Logarithmus - Funktionen $f : x \mapsto {}^a\log(x) \qquad a > 1$
4. Trigonometrische Funktionen $f : x \mapsto \sin(x), \quad g : x \mapsto \cos(x), \quad h : x \mapsto \tan(x)$
5. Arkus - Funktionen: $f : x \mapsto \arcsin(x), \quad g : x \mapsto \arccos(x), \quad h : x \mapsto \arctan(x)$



Grenzwerte von Funktionen & Stetigkeit

Eine Funktion f heisst stetig in einem Punkt ξ, falls dort gilt

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi^-} f(x)$$

wobei $x \to \xi^+$ den rechtsseitigen (d.h. wir nähern uns dem Punkt ξ von rechts) und $x \to \xi^-$ den linksseitigen (d.h. wir nähern uns dem Punkt ξ von links) Grenzwert bezeichnen.
Anschaulich (und mathematisch weniger korrekt) gesprochen, sind stetige Funktionen diejenigen, deren Graph man zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Sämtliche elementaren Funktionen und die aus ihnen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Verkettung gebildeten Funktionen sind auf Ihren Definitionsbereich stetig.

Beispiel 2:
Untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : x \to f(x), \quad f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ im Punkt $x = 1$

Wir müssen also die Grenzwerte von links bzw. von rechts berechnen. Dazu versuchen wir wieder den Betrag zu entfernen.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = -(x+1) & ,x < 1 \\ \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = (x+1) & ,x > 1 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} -(x+1) = -2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Das heisst die Funktion ist im Punkt $x = 1$ nicht stetig!

Meistens müssen wir bei Aufgaben mit Stetigkeit auch Grenzwerte berechnen. Dabei gelten die gleichen Regeln wie schon bei Folgen.

Tipps für Grenzwerte (Erweiterung)

1. Bei Brüchen: Durch die höchste auftretende Potenz von n teilen.
2. Bei Wurzel - Ausdrücken: Erweitern
3. Unentscheidbar: $\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad 0^0 \quad 0 \cdot \infty$
4. Polynom - Division (durch den Faktor, der gegen Null geht)
5. Dominante Funktionen identifizieren
6. Variable transformieren
7. Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

8. Regel des Bernoulli de l'Hôpital

Beispiel 3:
Berechne die Grenzwerte

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 12x + 20}$
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2 - \frac{\pi}{2}x}{\cos(x)}$

I.
Aus dem Bild oben (elementare Funktionen) sehen wir, dass $\log(x)$ weniger schnell wächst als x. In Zeichen kann man schreiben

$$\log(x) = \mathcal{O}(x) \qquad \ldots\text{In Worten: } \log(x) \text{ wächst langsamer als } x$$

Das bedeutet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

II.
Durch Einsetzen sehen wir, dass Zähler und Nenner bei $x = 2$ eine Nullstelle haben. Wir versuchen also einen Faktor $(x-2)$ auszuklammern. Mit Hilfe der Formel erhalten wir für die Nullstellen des Nenners $x = \{2, 10\}$. D.h.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 12x + 20} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x-2)(x-10)}$$

Wir können jetzt mit Hilfe einer Polynom - Division den Faktor (x - 2) auch aus dem Zähler ausklammern.

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = (x^2 - 4x + 3)$$

Damit finden wir

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 3)}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4x + 3)}{(x-10)} = \frac{1}{8}$$

III.
Wir nutzen die Identität (sieht man direkt am Einheitskreis) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \frac{\pi}{2}x}{\cos(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x(x - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$$

Wir versuchen eine Substitution: $y = \frac{\pi}{2} - x \qquad x = \frac{\pi}{2} - y$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x(x - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} &= \lim_{y \to 0} \frac{(\frac{\pi}{2} - y)(-y)}{\sin(y)} \\
&= \lim_{y \to 0} (\frac{\pi}{2} - y) \frac{-y}{\sin(y)} \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Regel des Bernoulli de l'Hôpital

Falls ein Grenzwert in eine der beiden Arten fällt

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\quad\text{oder}\quad\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$

dann gilt

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls nach dem Ableiten noch immer Zähler und Nenner gegen 0 oder ∞ streben, kann man die Regel auch erneut anwenden!
Achtung: Keine Quotienten - Regel! Zähler und Nenner separat ableiten!

Beispiel 4:
Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} x^3\cdot\log(x^2)$

Damit sich obige Regel anwenden lässt, muss man erst umstellen

$$\lim_{x\to 0} x^3\cdot\log(x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2)}{x^{-3}}\underbrace{=}_{\text{l'Hôpital}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-3x^{-4}}=\lim_{x\to 0}-\frac{2x^3}{3}=0$$

Koordinaten - Transformationen

Oft kann man Funktionen besser verstehen, wenn man sie durch eine Transformation auf eine einfachere (bekannte) Funktion zurückführt. Dazu verwendet man Koordinaten - Transformationen.

Beispiel 5:
Beschreibe jeweils in Worten wie sich folgende Funktionen aus $f(x)=\sin(x)$ bilden lassen ($c_i>1$).

1. $f_1(x)=\sin(x)+c_1$
2. $f_2(x)=\sin(x+c_2)$
3. $f_3(x)=c_3\sin(x)$
4. $f_4(x)=\sin(c_4x)$

Lösung

1. c_1 bewirkt eine Verschiebung des Graphs in die positive y - Richtung
2. c_2 bewirkt eine Verschiebung des Graphs in die negative x - Richtung
3. c_3 vergrössert die Amplitude des Sinus, d.h. eine Streckung entlang der y - Achse
4. c_4 bewirkt eine Stauchung entlang der x - Achse