Funktionen II

Eigenschaften

Eine Funktion $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ kann folgende Eigenschaften aufweisen:

Surjektiv:	Jedes Element der Zielmenge Y wird mindestens einmal getroffen. D.h. Wertebereich = Zielbereich
Injektiv:	Jedes Element der Zielmenge Y wird maximal einmal getroffen. D.h. das Urbild eines jeden Elements der Zielmenge besteht aus max. 1 Element
Bijektiv:	*Surjektiv + Injektiv*

Graphisch gesprochen, bedeutet *injektiv*, dass jede Gerade, parallel zur x - Achse die Funktion nur ein einziges mal schneidet (oder gar nicht).
Für stetige Funktionen gilt:

$$\text{f ist injektiv} \Leftrightarrow \text{f ist streng monoton}$$

Beispiel 1:
Sei $\mathcal{I} \coloneqq (0, 4\pi)$. Welche der Funktionen $f_i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3, \quad i = \{1, 2, 3, 4\}$ sind injektiv?

1. $f_1(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$
2. $f_2(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin\frac{\varphi}{2})$
3. $f_3(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin\varphi)$
4. $f_4(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin 2\varphi)$
5. Keine

Der mathematisch korrekte Weg, wäre für jede Funktion zu zeigen bzw. widerlegen, dass aus $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ folgt. Durch genügend langes Überlegen findet man aber genauso gut, dass nur $f_2(\varphi)$ injektiv sein kann.

Die Inverse Funktion

Bijektive Funktionen $f : X \to Y, x \mapsto y$ ordnen nicht nur jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu, sondern zu jedem y existiert auch nur genau ein x. Diesen Zusammenhang kann man ebenfalls mit einer Funktion beschreiben. Es handelt sich um die Inverse von f, in Zeichen f^{-1}.
Der Graph der Inversen geht aus demjenigen der ursprünglichen Funktion hervor, indem man diese an der Geraden $y = x$ spiegelt!
Vorgehen:

1. Löse die Gleichung für $f : y(x) = \ldots$ nach x auf.
2. Achtung: Definitions- und Werte - Bereiche beachten!
3. Benenne die Variablen um: $x \to y^{-1} \quad \& \quad y \to x$

Beispiel 2:
Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x), f(x) = \min\{(x+1)^3 - 1, \max\{x, x^2\}\}$

1. Skizziere f und schreibe sie als stückweise definierte Funktion
2. Zeige, dass f stetig und injektiv ist
3. Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} von f

I:
Wir arbeiten uns von Innen nach Aussen. Man findet (z.B. durch Vergleichen der Graphen), dass

$$\max\{x, x^2\} = \begin{cases} x^2, & x < 0 \quad \&\& \quad x > 1 \\ x, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Nun suchen wir das Minimum. Dafür brauchen wir eine Fall - Unterscheidung:
i) $x < 0$

$$\begin{aligned} (x+1)^3 - 1 &< x^2 \\ x^3 + 3x^2 + 3x &< x^2 \\ x^3 + 2x^2 + 3x &< 0 \\ x^2 + 2x + 3 &> 0 \\ (x+1)^2 + 2 &> 0 \qquad \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

ii) $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} (x+1)^3 - 1 &< x \\ (x+1)^3 &< (x+1) \\ (x+1)^2 &< 1 \qquad \text{falsche Aussage} \end{aligned}$$

iii) $x > 1$

$$\begin{aligned} (x+1)^3 - 1 &< x^2 \\ x^3 + 3x^2 + 3x &< x^2 \\ x^3 + 2x^2 + 3x &< 0 \\ x^2 + 2x + 3 &< 0 \\ (x+1)^2 + 2 &< 0 \qquad \text{falsche Aussage} \end{aligned}$$

Zusammenfassend also

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x < 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

II:
Für die Stetigkeit untersuchen wir die kritischen Punkte $x = \{0, 1\}$. Ansonsten handelt es sich um elementare Funktionen, von denen wir wissen, dass sie stetig sind. Es gilt

$$\begin{aligned} (x+1)^3 - 1 \,\Big|_{x=0} &= 0 = x\Big|_{x=0} \\ x\Big|_{x=1} &= 1 = x^2\Big|_{x=1} \end{aligned}$$

Womit die Stetigkeit geprüft wäre. Injektivität können wir mit Hilfe der Monotonie nachweisen

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2, & x < 0 \\ 1, & x \in (0,1) \\ 2x, & x > 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) > 0 \quad \forall_x$$

III:
Wir berechnen die Umkehrfunktion ebenfalls stückweise.
i) $x < 0$

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^3 - 1 \\ (y+1)^{\frac{1}{3}} &= x + 1 \\ x &= (y+1)^{\frac{1}{3}} - 1 \\ f^{-1}(x) &= (x+1)^{\frac{1}{3}} - 1 \end{aligned}$$

ii) $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} y &= x \\ f^{-1}(x) &= x \end{aligned}$$

iii) $x > 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

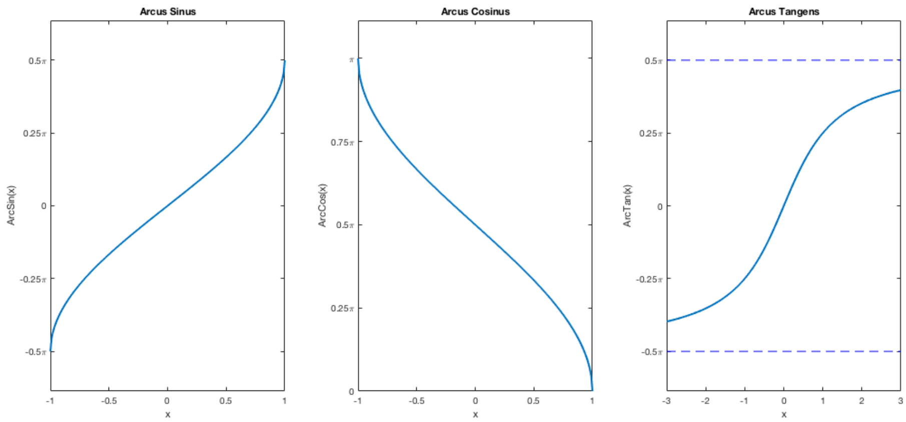
Also

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} (x+1)^{\frac{1}{3}} - 1, & x < 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Die Arcus Funktionen

Wichtige Inverse Funktionen sind diejenigen der trigonometrischen Funktionen. Da trig. Funktionen nicht injektiv sind, muss man den Definitionsbereich anpassen, um Umkehrfunktionen definieren zu können.
Die Werte - Bereiche sind

Arcus Sinus: $f^{-1}: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Arcus Cosinus: $f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$
Arcus Tangens: $f^{-1}: \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Beispiel 3:
Bestimme die Umkehrfunktion von $f: [2\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$

Zuerst suchen wir den Wertebereich von f, d.h. den Definitionsbereich von f^{-1}. Wie wir wissen ist dies beim Cosinus $W(f) = [-1, 1]$.

Zum Auflösen der Gleichung $y = \cos(x)$ nach x müssen wir beachten, dass wir den korrekten Bereich für das Argument des Cosinus finden. Es gilt

$$y = \cos(x) = \cos(x - 2\pi) \Rightarrow \arccos(y) = x - 2\pi$$

Und schliesslich

$$f^{-1}: [-1, 1] \to [2\pi, 3\pi], x \mapsto \arccos(x) + 2\pi$$

Asymptoten

Asymptoten $g(x)$ einer Funktion $f(x)$ erfüllen die Bedingung

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$$

Berechung:

1. Educated Guess
2. Polynom - Division
3. Bei Asymptoten der Form $g(x)=ax+b$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \qquad \lim_{x\to\infty}f(x)-ax=b$$

Beispiel 4:
Bestimme eine Asymptote der Funktion

$$f(x)=\frac{x^5+3x^4+2x^3+x^2+8x+2}{x^3+1}$$

Wir führen hier einfach eine Polynomdivision mit Rest durch

$$(x^5+3x^4+2x^3+x^2+8x+2):(x^3+1)=x^2+3x+2+\frac{5x}{\mathcal{O}(x^5)}$$

Für grosse x strebt der Term mit Potenz 5 im Nenner gegen Null. Damit haben wir die Asymptote gefunden.

$$g(x)=x^2+3x+2$$

Beispiel 5:
Bestimme eine (affine) Asymptote der Funktion

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+a)}, a\in\mathbb{R}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+a)}}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{a}{x})}=1\end{aligned}$$

Für den zweiten Grenzwert verwenden wir erst die Substitution $x=\frac{1}{y}$ und danach die Regel des l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2(x+a)}-x&=\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}(\frac{1}{y}+a)}-\frac{1}{y}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+ay)}1}{y}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{a}{3(1+ay)^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{3}\end{aligned}$$

Damit ist die Asymptote $g(x)=x+\frac{a}{3}$