Komplexe Zahlen

Die Zahlenmengen, mit denen wir bis jetzt gearbeitet haben lassen sich zusammenfassen als

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

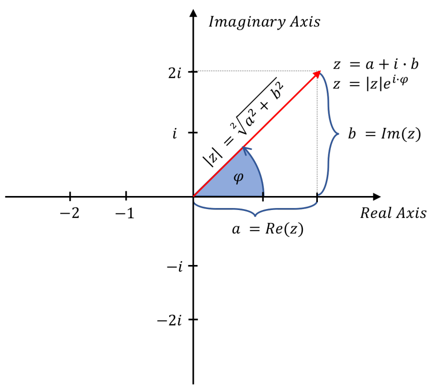
Die natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Operation des Addierens. Das heisst das Ergebnis jeder Addition zweier Zahlen aus $\mathbb{N}$ liegt wieder in $\mathbb{N}$. Dies gilt nicht für die Subtraktion. Um ein Ergebnis für die Gleichung $a - x = b$ für $b > a$ finden zu können, müssen wir die natürlichen Zahlen erweitern zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Das gleiche passiert wenn wir mit den ganzen Zahlen eine Gleichung der Art $a \cdot x = b$ für alle a, b lösen wollen, etc. etc.

Wegen eines ähnlichen Problems werden die komplexen Zahlen eingeführt. Wir wollen nun die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösen. Da das Ergebnis nicht in $\mathbb{R}$ liegen kann, müssen wir ein neues Zahlengebäude $\mathbb{C}$ definieren, mit der **komplexen Einheit** i als Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Eine allgemeine komplexe Zahl ist dann $z = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Darstellung

Wir stellen uns eine komplexe Zahl als Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene vor. Diese Ebene ist die 2D Erweiterung der 1D reellen Achse. In gewisser Analogie zur Vektorrechnung können wir auch hier verschiedene Koordinaten wählen um den Punkt darzustellen.



Kartesisch:	$z = x + i \cdot y$
Polar:	$z = \lvert z \rvert e^{i \cdot \varphi}$

x	... Realteil: $Re(z)$
y	... Imaginärteil: $Im(z)$
$\lvert z \rvert$	... Betrag
φ	... Argument: $arg(z)$

Umrechnung

Es gelten die gewohnten Umrechnungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten.

$$x = |z| \cdot \cos\varphi$$
$$y = |z| \cdot \sin\varphi$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0, y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Für das Argument φ ist es am besten, wenn man sich den Punkt in der komplexen Ebene zeichnet. Dann sieht man schnell welcher Winkel mit $\arctan \frac{y}{x}$ bestimmt wird.

Euler - Formel: Mit obigen Umrechnungen gilt die wichtige Formel

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Komplex konjugieren

Zu jeder komplexen Zahl z existiert eine komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ oder auch z^*.

$$z = x + i \cdot y \Rightarrow \bar{z} = x - i \cdot y$$

$$z = |z|e^{i\cdot\varphi} \Rightarrow |z|e^{i\cdot(-\varphi)}$$

Graphisch gesehen entspricht die komplexe Konjugation einer Spiegelung an der reellen Achse.

$$\left(\frac{a + i \cdot b}{c - i \cdot d}\right)^* = \frac{a - i \cdot b}{c + i \cdot d}$$

Es gilt stets:

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$
$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Nebenbemerkung:
Betrachte eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis, d.h. mit Betrag 1.

$$z = e^{i\phi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

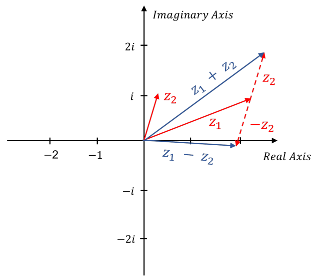
Wir können gemäss obiger Formel Real - Teil und Imaginär - Teil hinschreiben und finden schöne und wichtige Beziehungen.

$$\cos\varphi = Re(z) = \frac{1}{2}(e^{i\cdot\varphi} + e^{i\cdot(-\varphi)})$$

$$\sin\varphi = Im(z) = \frac{1}{2i}(e^{i\cdot\varphi} - e^{i\cdot(-\varphi)})$$

Addition & Subtraktion

Zum Addieren/Subtrahieren empfehlen sich die kartesischen Koordinaten. Wir verwenden wieder die Analogie zur Vektorrechnung. Es werden Real - Teil und Imaginär - Teil je einzeln addiert.



$$(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b + d)$$

Multiplikation & Division

Hier empfehlen sich primär Polarkoordinaten. Dann werden Beträge multipliziert/dividiert und Winkel addiert/subtrahiert.

$$\left(|z_1|e^{i\cdot\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2|e^{i\cdot\varphi_2}\right) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Mit kartesischen Koordinaten ist dies ein bisschen mühsamer. Bei der Division ist die Standardvorgehensweise komplex konjugiert zu Erweitern.

$$(a + i \cdot b) \cdot (ci \cdot d) = (ac - bd) + i \cdot (ad + bc)$$

$$\frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{1^2-(2i)^2} = \frac{3+i-6i+2}{1+4} = \frac{5-5i}{5} = 1 - i$$

Wuzelziehen

Die n-te Wurzel einer komplexen Zahl hat n verschiedene Lösungen. Diese liegen sowohl auf einem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung, als auch auf einem regelmässigen n - Eck. Am besten sehen wir das Vorgehen an einem Beispiel.

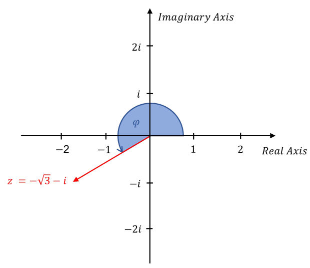
BEIM LÖSEN: Immer in Polarform & Periodizität betrachten. Das heisst wenn man zu einem Winkel in der komplexen Ebene ein Vielfaches von 2π addiert, befindet man sich wieder am selben Punkt: $e^{i\cdot\varphi} = e^{i\cdot(\varphi+2n\pi)} \quad \forall_{n\in\mathbb{Z}}$

Bespiel 1:

Berechne $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$.

I. Polarform

Für das Argument skizzieren wir die Zahl in der komplexen Ebene.



$|-\sqrt{3}-i| = \sqrt{3+1} = 2$

$arg(-\sqrt{3}-i) = \pi + \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

II. Periodizität

$$-\sqrt{3} - i = 2e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}} = 2e^{i\cdot(\frac{7\pi}{6}+2n\pi)}$$

III. Gleichung aufstellen

Wir können die Lösung ganz allgemein schreiben als $z = |z|e^{i\psi}$. Diese erfüllt

$$|z|e^{i\psi} = \sqrt[5]{2e^{i\cdot(\frac{7\pi}{6}+2n\pi)}}$$

$$\left(|z|e^{i\psi}\right)^5 = 2e^{i\cdot(\frac{7\pi}{6}+2n\pi)}$$

$$|z|^5e^{i\cdot5\psi} = 2e^{i\cdot(\frac{7\pi}{6}+2n\pi)}$$

IV. Gleichung lösen
Zum Lösen betrachten wir Betrag und Winkel separat und setzen jeweils gleich, d.h.

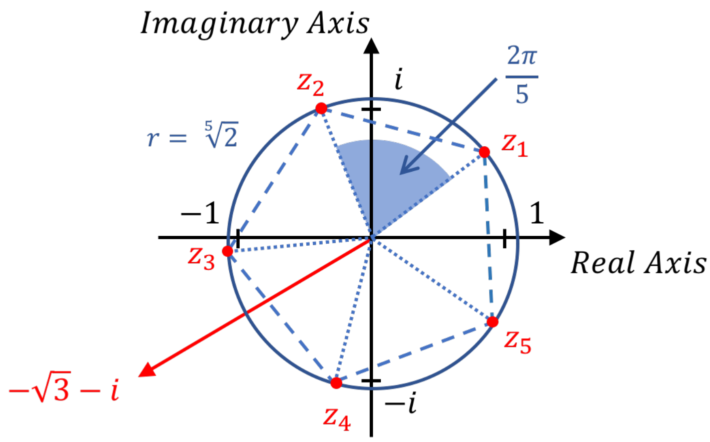
$$\begin{aligned} |z|^5 e^{i\cdot 5\psi} &= 2e^{i\cdot\left(\frac{7\pi}{6}+2n\pi\right)} \\ |z|^5 &= 2 \\ 5\psi &= \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \end{aligned}$$

Damit finden wir durch Einsetzen für $n = 0, 1, 2, 3, 4$, die 5 verschiedenen Lösungen

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt[5]{2} \\ \psi &= \frac{7\pi}{30} + \frac{2n}{5}\pi = \left\{\frac{7\pi}{30}, \frac{19\pi}{30}, \frac{31\pi}{30}, \frac{43\pi}{30}, \frac{55\pi}{30}\right\} \end{aligned}$$

Setzen wir $n = 5$ ein, haben wir uns einmal im Kreis gedreht (2π) und sind wieder beim gleichen Punkt wie für $n = 0$.

V. Lösungen zeichnen



Jedes Polynom n-ten Grades $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ hat auf der Menge der komplexen Zahlen genau n Nullstellen, wenn man mit Vielfachheiten zählt. Sind die Koeffizienten a_i reell, so gilt zusätzlich: Nullstellen sind entweder reell oder treten komplex konjugiert auf!
Folgerung: Jedes Polynom vom Grad n kann als Produkt von n Linearfaktoren geschrieben werden.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Vorgehen zum Bestimmen von Nullstellen:
Für Polynome mit Grad $n > 2$ müssen wir eine Nullstelle x_1 gegeben haben. Ansonsten muss man raten. Danach kann man durch den Faktor $x - x_1$ dividieren. Diese Polynomdivision hat Null Rest. Bei komplexen Nullstellen: Dividiere durch $(z-z_1)\cdot(z-z_1^*)$

Beispiel 2:
Das Polynom $x^3 - 5x^2 + 8x + q, \qquad q \in \mathbb{R}$ habe eine komplexe Nullstelle mit Real - Teil 1. Bestimme q und alle Nullstellen.

Da alle Koeffizienten des Polynoms reell sind, treten komplexe Nullstellen stets komplex konjugiert auf. D.h.

$$x_1 = 1 + i \cdot b$$
$$x_2 = 1 - i \cdot b$$

Der Faktor $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 - bi)(x - 1 + bi) = (x^2 - 2x + 1 + b^2)$ muss im Polynom *enthalten sein* und wir können durch diesen term dividieren, mit der Sicherheit, dass die Polynomdivision Rest Null hat.

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & -5x^2 & +8x & +q) & : (x^2 - 2x + 1 + b^2) = x - 3 \\
\hline
x^3 & -2x^2 & +(1+b^2)x & & \\
 & -3x^2 & +(7-b^2)x & +q & \\
 & -3x^2 & +6x & -3(1+b^2) & \\
 & & (1-b^2)x & q+3+3b^2 &
\end{array}$$

Verlange, dass der Rest gleich Null gibt:

$$(1 - b^2)x + q + 3 + 3b^2 = 0$$

Da diese Gleichung für alle x gelten muss, müssen die Koeffizienten selber verschwinden, d.h.

$$\begin{aligned} 1 - b^2 &= 0 \\ q + 3 + 3b^2 &= 0 \\ b &= \pm 1 \\ q &= -6 \end{aligned}$$

Also hat das Polynom $x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ die Nullstellen $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, $x_3 = 3$

Alte Prüfungsaufgabe:
Es sei die komplexe Abbildung gegeben

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z - 1}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Für welche Punkte gilt $|f(z)| = 2$?

Zuerst schreiben wir die Gleichung ohne Bruch $|z - 2i| = 2|z - 1|$.
Das Standard - Vorgehen hier ist für $z = x + iy$ einzusetzen.

$$\begin{aligned}
|x + iy - 2i| &= 2|x + iy - 1| \\
\sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
x^2 + y^2 - 4y + 4 &= 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \\
3x^2 - 8x + 3y^2 + 4y &= 0 \\
x^2 - \frac{8}{3}x + y^2 + \frac{4}{3}y &= 0 \\
\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} \\
\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{20}{9}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Menge an Punkten ist also ein Kreis mit obiger Gleichung.