Differentialrechnung

Eine Funktion f heisst differenzierbar, im Punkt x_0, falls der Differentialquotient in diesem Punkt existiert.

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ist f in allen Punkten differenzierbar, dann heisst sie differenzierbar schlechthin.

Die Abbildung $f'(x) : x \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$ heisst Ableitung von f.

Eine differenzierbare Funktion ist zwingend stetig. Aber nicht jede stetige Funktion muss in allen Punkten differenzierbar sein.
Zum Beispiel ist $f : x \mapsto |x|$ zwar stetig, jedoch ist der Differentialquotient in $x = 0$ nicht definiert, da die Grenzwerte von links und rechts unterschiedliche Werte geben.

Ableitungsregeln:

Linearität: $$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Produkteregel: $$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{N} f_i = \sum_{k=1}^{N} f'_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} f_i$$

Quotientenregel: $$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kettenregel: $$\frac{d}{dx} f(g_{(x)}) = f'(g_{(x)}) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f \circ g) = \big(f' \circ g\big) \cdot g'$$

Ableitung Inverse: $$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}_{(x)})} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Beispiel 1:

Auf welchem maximalen Bereich ist die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ differenzierbar?

- ☐ auf $(0, 1)$
- ☐ auf $(-1, 1)$
- ☐ auf $[-1, 1]$
- ☐ auf $(-1, 1) \setminus \{0\}$

Die Ableitung $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist definiert auf $x \in (-1, 1)$. Auf diesem Bereich ist f differenzierbar.

Beispiel 2:

Seien f und g zwei Funktionen. Existieren die Funktionen $g \circ f$ und $h := (g \circ f)^{-1}$, so ist $h' = \dots$ in allen Punkten, für die die rechte Seite definiert ist.

- ☐ $\frac{1}{(g' \circ f \circ g \circ f) \cdot (f' \circ g \circ f)}$
- ☐ $\frac{1}{(g^{-1} \circ g') \cdot (f^{-1} \circ f' \circ g^{-1})}$
- ☐ $\frac{1}{(g' \circ f^{-1} \circ g^{-1}) \cdot (f' \circ f^{-1} \circ g^{-1})}$
- ☐ $\frac{1}{(g' \circ g^{-1}) \cdot (f' \circ f^{-1} \circ g^{-1})}$

Zuerst bemerken wir: $h = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
Denn damit gilt $h \circ h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = \mathcal{I}$
Ausserdem gilt für drei Funktionen a, b, c, dass $(a \cdot b) \circ c = (a \circ c) \cdot (b \circ c)$
Dann verwenden wir die Regel für die Ableitung der Inversen und die Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(g \circ f)^{-1} &= \frac{1}{((g' \circ f) \cdot f') \circ (g \circ f)^{-1}} \\ &= \frac{1}{(g' \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}) \cdot (f' \circ f^{-1} \circ g^{-1})} \\ &= \frac{1}{(g' \circ g^{-1}) \cdot (f' \circ f^{-1} \circ g^{-1})} \end{aligned}$$

Beispiel 3:
Seien $f(x) = x^2$ & $g(x) = e^x$. Finde die Ableitung der jeweiligen Umkehrfunktion mit der Regel der Inversen.
I:
Die Ableitung von f ist $\frac{d}{d\tilde{x}}\tilde{x}^2 = 2\tilde{x}$. Damit ist $\frac{d}{dx}f^{-1} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{(2\tilde{x})|_{\tilde{x}=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
II:
Die Ableitung von g ist $\frac{d}{d\tilde{x}}e^{\tilde{x}} = e^{\tilde{x}}$. Damit ist $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{(e^{\tilde{x}})|_{\tilde{x}=\log(x)}} = \frac{1}{x}$

Beispiel 4:

Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in (0, \infty)$ ist ...

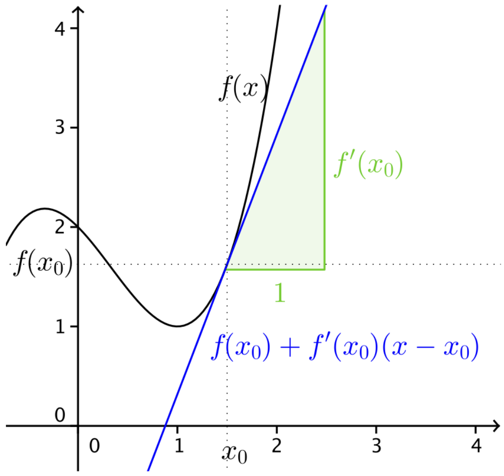
- ☐ $f'(x) = x^2$.
- ☐ $f'(x) = x^{x-1}$.
- ☐ $f'(x) = x^x$.
- ☐ $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.
- ☐ $f'(x) = x + x \log x$.
- ☐ keiner der obigen Ausdrücke.

Wir schreiben den Ausdruck um

$$\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{\log(x^x)} = \frac{d}{dx}e^{x \cdot \log(x)} = e^{x \cdot \log(x)}(\log(x) + 1) = x^x \cdot (\log(x) + 1)$$

Linearisierung & Tangente

Manchmal genügt es komplizierte Funktionen nur in einem kleinen Bereich um eine Stelle x_0 zu betrachtet. Dort kann man die Funktion durch ihre lineare Ersatzfunktion (oder Tangente) näherungsweise beschreiben.



Die Gleichung dieser Linearisierung von f in x_0 ist gegeben durch

$$t : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiel 5:
Zeige, dass für kleine Geschwindigkeiten $(\frac{v}{c})^2 << 1$ die relativistische kinetische Energie

$$E_{Kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - mc^2$$

in guter Näherung durch die klassische Formel beschrieben wird.

Wir substituieren $x = (\frac{v}{c})^2$ und betrachten die lineare Ersatzfunktion von $E_{Kin}(x)$ in $x = 0$. Es gilt $E(0) = 0$. Ausserdem

$$\frac{d}{dx}E(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-x}} - mc^2\right) = \frac{mc^2}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}E(0) = \frac{1}{2}mc^2$$

Damit ist die Ersatzfunktion

$$E_{Kin}^{Klass} - E_{Kin}^{Rel}(0) = \frac{1}{2}mc^2 \cdot x$$

$$E_{Kin}^{Klass} = \frac{1}{2}mv^2$$

Fehlerrechnung

Häufig kommt es vor, dass man eine Grösse x im Labor misst und damit eine andere Grösse f berechnet. Ziel der Fehlerrechnung ist es zu bestimmen, wie sich Messfehler von x auf die berechnete Grösse f auswirken. Man unterscheidet

Absoluter Fehler: Unterschied zwischen tatsächlichem und gemessenem Wert, üblicherweise mit Δx bzw. Δf bezeichnet

Relativer Fehler: Absoluter Fehler bezogen auf den gemessenen Wert $\frac{\Delta x}{x}$ bzw. $\frac{\Delta f}{f}$

Die Abschätzung des Fehlers macht man nur ungefähr (lineare Approximation) über

$$\Delta f = \frac{d}{dx} f(x) \cdot \Delta x$$

Der relative Fehler der Messgrösse ist dann einfach $\frac{\Delta f}{f}$.

Beispiel 6:
Die (dimensionslose) Nusselt - Zahl spielt in der Fluid- & Thermodynamik wichtige Rolle. Für turbulente Rohrströmungen gilt unter gewissen Bedingungen

$$\overline{Nu}_D = 1.86 \left(\frac{Re_D Pr}{L/D} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}$$

Bestimme, wie sich Fehler in den Messungen der Prandtl Zahl Pr bzw. der Viskosität μ auf das Ergebnis auswirken.

Prandtl - Zahl:

$$\Delta \overline{Nu}_D = \frac{d}{d(Pr)} \overline{Nu}_D \cdot \Delta(Pr) = 0.62 (Pr)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{Re_D}{L/D} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \cdot \Delta(Pr)$$

$$\frac{\Delta \overline{Nu}_D}{\overline{Nu}_D} = \frac{1}{3Pr} \Delta(Pr)$$

Viskosität:

$$\Delta \overline{Nu}_D = \frac{d}{d\mu} \overline{Nu}_D \cdot \Delta\mu = 0.2604 \mu^{-0.86} \left(\frac{Re_D Pr}{L/D} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\mu_s} \right)^{0.14} \cdot \Delta\mu$$

$$\frac{\Delta \overline{Nu}_D}{\overline{Nu}_D} = \frac{0.14}{\mu} \Delta\mu$$