Differentialrechnung II

Landau Symbole $o()$ vs. $\mathcal{O}()$

Definition:

1. $f = o(g) \ldots f$ *wächst wesentlich langsamer als* g

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

2. $f = \mathcal{O}(g) \ldots f$ *wächst nicht schneller als* g

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = c \qquad c \in [0, \infty)$$

Das kleine $o()$ kann wie eine strikte Version des grossen $\mathcal{O}()$ betrachtet werden - es ist also als Spezialfall in $\mathcal{O}()$ enthalten. Es sollte stets aus dem Kontext klar sein, was mit a gemeint ist. Oft wird stillschweigend verwendet $a = \infty$.

Beispiel 1:
Vergleiche das Wachstum der Funktionen

1. $f(x) = \frac{1}{x} + x$ vs. $g(x) = 2x$ für $x \to \infty$
2. $f(x) = \log(e^{\sqrt{x}} - x)$ vs. $g(x) = \sqrt{x}$ für $x \to \infty$

I:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\frac{1}{x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} = 2 \Rightarrow g = \mathcal{O}(f)$$

II:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{\log(e^{\sqrt{x}} - x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \to \infty} \frac{\log(e^{\sqrt{x}}(1 - \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}))}{\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log(e^{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} + \frac{\log(1 - \frac{x}{e^{\sqrt{x}}})}{\sqrt{x}} \right) \\
&= 1 + \frac{\log(1)}{\infty} = 1 \\
f &= \mathcal{O}(g)
\end{aligned}$$

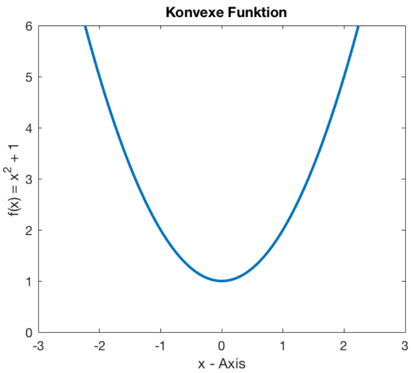
Mit demselben Vorgehen findet man $g = \mathcal{O}(f)$

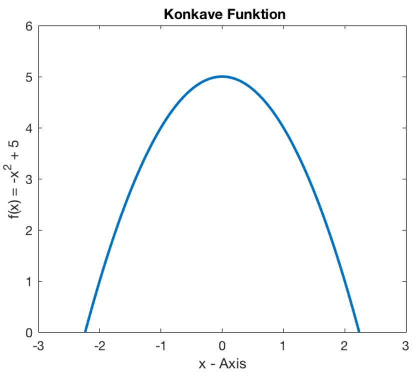
Konvexe & Konkave Funktionen

Wir betrachten eine Funktion $f : A \to B, x \mapsto f(x)$. Seien $x_1, x_2 \in A$ und $\lambda \in (0,1)$. Dann nennen wir die Funktion f

$$\begin{array}{llll} \textbf{Konvex:} & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) & \xrightarrow{A,B\subseteq\mathbb{R}} & f''(x) \geq 0 \\ \textbf{Konkav:} & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) & \xrightarrow{A,B\subseteq\mathbb{R}} & f''(x) \leq 0 \end{array}$$

In Worten lauten obige Ungleichungen: Eine Funktion heisst konvex (konkav), falls ihr Graph stets unterhalb (überhalb) der Sekante durch zwei beliebige Punkte liegt.





Alte Prüfungsaufgabe:
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit stetiger zweiter Ableitung. Definiere ihr Produkt $h(x) := f(x) \cdot g(x)$. Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig?

1. Wenn f und g beide positiv und monoton steigend sind, dann ist auch h monoton steigend.
2. Wenn f negativ und monoton steigend ist, und g positiv und monoton fallend ist, dann ist h monoton steigend.
3. Sind f und g beide positiv und beide monoton steigend und beide konvex, dann ist auch h konvex.
4. Sind f und g beide monoton fallend, beide positiv und beide konvex, dann ist h konkav.

Betrachten wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} h' &= (f\cdot g)' = f'g + fg' \\ h'' &= (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg'' \end{aligned}$$

I. Wahr. Mit $f \geq 0 \quad f' \geq 0 \quad g \geq 0 \quad g' \geq 0$ ist auch $h' \geq 0$, also monoton steigend.
II. Wahr. Mit $f \leq 0 \quad f' \geq 0 \quad g \geq 0 \quad g' \leq 0$ ist auch $h' \geq 0$, also monoton steigend.
III. Wahr. Mit $f \geq 0 \quad f' \geq 0 \quad f'' \geq 0 \quad g \geq 0 \quad g' \geq 0 \quad g'' \geq 0 \Rightarrow h'' \geq 0 \Rightarrow$ konvex.
IV. Falsch. Mit $f \geq 0 \quad f' \leq 0 \quad f'' \geq 0 \quad g \geq 0 \quad g' \leq 0 \quad g'' \geq 0 \Rightarrow h'' \geq 0 \Rightarrow$ konvex.

Extremalwert - Aufgaben

Vorgehen:

1. Finde die lokalen Extrema über $f'(x) = 0$
2. Mache eine Liste **ALLER** Kandidaten. Dazu gehören zwingend die Randpunkte des Definitionsbereichs.
3. Wähle Maximum und Minimum aus der Liste.

Beispiel 3:
Gegeben sei die Funktion $f : [1, e^3] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x(\log(x)^2 - 5\log(x) + 7)$
Bestimme das globale Maximum bzw. Minimum.

Zuerst bestimmen wir die lokalen Extrema

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log(x)^2 - 5\log(x) + 7) + x(\frac{2\log(x)}{x} - \frac{5}{x}) \\ &= \log(x)^2 - 3\log(x) + 2 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Für die quadratische Gleichung substituieren wir $y = \log x$ und erhalten

$$y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \{1, 2\}$$

Rücksubstituieren gibt $x = \{e, e^2\}$ und wir können eine Tabelle für die kritischen Punkte anfertigen.

x	$f(x)$
1	7
e	$3e \sim 8.1$
e^2	$e^2 \sim 7.4$
e^3	$e^3 \sim 20.1$

Damit finden wir
Globales Minimum: $f(x_{MIN}) = 7$ bei $x_{MIN} = 1$
Globales Maximum: $f(x_{MAX}) = e^3$ bei $x_{MAX} = e^3$

Hyperbolicus Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \qquad \operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \frac{d}{dx}\tanh(x) = 1 - \tanh(x)^2 \qquad \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1 + x}{1 - x})$$