Differentialrechnung - Varia

Kurvendiskussion
Sei $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. Bestimme:

1. Definitionsbereich und Nullstellen
2. Monotonie-Verhalten
3. Lokale sowie globale Minima & Maxima
4. Wertebereich
5. Bereich wo die Funktion konvex/konkav ist bzw. Wendepunkte aufweist
6. Skizziere den Graphen

I:
Um den Definitionsbereich zu bestimmen, verlangen wir, dass das Argument der Wurzel grösser Null ist.

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in D_f = [-2, 2]$$

Die Nullstellen finden wir einfach durch Null setzen der einzelnen Faktoren.

$$f(x) = 0 = x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x = \{0, -2, 2\}$$

II:
Für das Monotonie - Verhalten bestimmen wir die erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \\ &= \sqrt{4-x^2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4-x^2}\right) \end{aligned}$$

Die Ableitung $f'(x)$ ist definiert auf dem (offenen!) Intervall $x \in (-2, 2)$.
Um das Vorzeichen von $f'(x)$ zu bestimmen betrachten wir jeden Faktor einzeln.

1. $\sqrt{4-x^2} \geq 0 \quad \forall_{x \in D_f}$
2. $1 - \frac{x^2}{4-x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - x^2 \geq x^2 \Rightarrow 2 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Die Monotonie hängt also nur von dem zweiten Faktor ab und es gilt

$$f(x) = \begin{cases} \text{Mon. fallend:} & x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup x \in [\sqrt{2}, 2] \\ \text{Mon. steigend:} & x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases}$$

III:
Durch Null setzen der ersten Ableitung - und Beachten ihres Definitionsbereiches - findet man die globalen Extrema

$$x_E = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Die globalen Extrema, sowie den Unterschied zwischen Minima und Maxima finden wir durch eine Liste der Kandidaten - inkl. Randpunkte!

Die Kandidaten sind

x	$f(x)$
-2	0
$-\sqrt{2}$	-2
$\sqrt{2}$	2
2	0

Damit fallen lokale und global Extremalstellen zusammen!
Minimum: $x_{MIN} = -\sqrt{2} \to f_{MIN} = -2$
Maximum: $x_{MAX} = \sqrt{2} \to f_{MAX} = 2$

IV:
Den Wertebereich können wir damit direkt angeben als

$$W_f = [-2, 2]$$

wobei wir verwenden, dass f eine stetige Funktion ist und damit alle Werte zwischen globalem Minimum und Maximum angenommen werden müssen!

V:
Wir benötigen die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\left(1 - \frac{x^2}{4-x^2}\right) + \sqrt{4-x^2}\left(-\frac{2x(4-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2}\right) \\ &= x\sqrt{4-x^2}\left(-\frac{1}{4-x^2} + \frac{x^2}{(4-x^2)^2} - \frac{8}{(4-x^2)^2}\right) \\ &= x\sqrt{4-x^2}\left(\frac{x^2 - (4-x^2) - 8}{(4-x^2)^2}\right) \\ &= x\sqrt{4-x^2} \cdot \frac{2 \cdot (x^2 - 6)}{(4-x^2)^2} \end{aligned}$$

Wie oben untersuchen wir die Faktoren einzeln. Auf unserem Definitionsbereich gilt

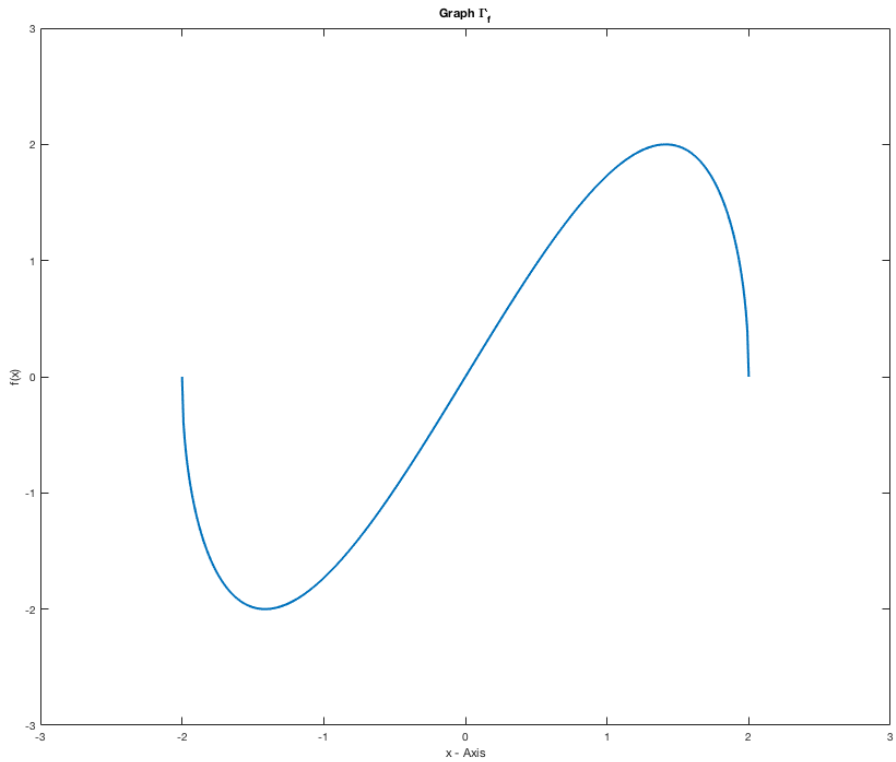
1. $\sqrt{4-x^2} \geq 0$
2. $(4-x^2)^2 \geq 0$
3. $x \cdot (x^2 - 6) = \begin{cases} < 0, & x > 0 \\ > 0, & x < 0 \end{cases}$

Damit gilt

$$f(x) = \begin{cases} \text{Konvex:} & f''(x) > 0, \quad x < 0 \\ \text{Konkav:} & f''(x) < 0, \quad x > 0 \end{cases}$$

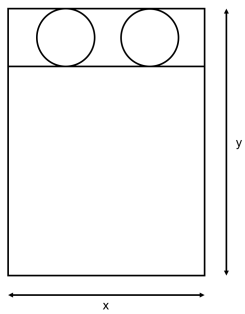
Offensichtlich wechselt das Vorzeichen der zweiten Ableitung bei $x = 0$. Dort finden wir einen Wendepunkt!

VI:



Extremwert Aufgabe - Alte Prüfungsaufgabe:

Aus einem rechteckigen Blech der (gegebenen) Fläche F schneide man Mantel-, Boden- und Deckfläche eines Zylinders (siehe Figur). Wie müssen die Abmessungen x, y gewählt werden, damit der Zylinder grösstmögliches Volumen hat?



Es gibt zwei Möglichkeiten den Zylinder zu formen. Bezeichnen wir mit r den Radius des Grundkreises und mit h die Höhe des Zylinders.

Variante 1:

$$\begin{aligned} F &= xy \\ x &= 2\pi r \\ y &= h + 2r \end{aligned}$$

Variante 2:

$$\begin{aligned} F &= xy \\ x &= h \\ y &= 2\pi r + 2r \end{aligned}$$

In beiden Fällen haben wir 3 Gleichungen für 4 Unbekannte (x, y, r, h). Die vierte Bedingung ist dadurch gegeben, dass das Volumen $V = \pi r^2 h$ maximal werden soll. Wir versuchen also in beiden Fällen das Volumen als eine Funktion von nur einer Variable auszudrücken, danach abzuleiten und Null zu setzen.

Variante 1:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (y - 2r) = \pi r^2 (\frac{F}{x} - 2r)$$

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 (\frac{F}{2\pi r} - 2r) = \frac{1}{2} F r - 2\pi r^3 \\ \frac{d}{dr} V(r) &= \frac{1}{2} F - 6\pi r^2 \stackrel{!}{=} 0 \\ r_{MAX} &= \sqrt{\frac{F}{12\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{3\pi}} \\ V^1_{MAX} &= \frac{1}{4} \frac{F^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{1}{12} \frac{F^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\pi}} = \frac{1}{6} \frac{F^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\pi}} \end{aligned}$$

Variante 2:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 x = \pi r^2 \frac{F}{y} = \pi r^2 \frac{F}{2\pi r + 2r} = \frac{F\pi r}{2\pi + 2}$$

$$\frac{d}{dr}V(r) = \frac{F\pi}{2\pi + 2} \neq 0$$

$$r_{MAX} = \frac{x}{4} = \frac{h}{4} \qquad \text{Geometrische Bedingung}$$

$$V_{MAX}^2 = \frac{\pi}{16}h^3$$

$$\text{Mit} \quad F = h \cdot (\frac{h\pi}{2} + \frac{h}{2}) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2F}{1+\pi}} \quad \text{finden wir}$$

$$V_{MAX}^2 = \frac{\sqrt{2}\pi F^{\frac{3}{2}}}{8(1+\pi)^{\frac{3}{2}}}$$

Jetzt können wir die beiden Varianten vergleichen

$$\begin{aligned} V_{MAX}^1 &\overset{?}{<} V_{MAX}^2 \\ \frac{1}{6}\frac{F^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\pi}} &< \frac{\sqrt{2}\pi F^{\frac{3}{2}}}{8(1+\pi)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{9 \cdot 3\pi} &< \frac{2\pi^2}{16(1+\pi)^3} \\ (1+\pi)^3 &< \frac{27\pi^3}{8} \\ 1+\pi &< \frac{3\pi}{2} \\ 2 &< \pi \end{aligned}$$

Das bedeutet das maximale Volumen erhalten wir mit der zweiten Variante mit einem $r_{MAX} = \frac{x}{4}$. Hier gilt

$$x = h = \sqrt{\frac{2F}{(\pi+1)}}$$

$$y = \frac{F}{x} = \sqrt{\frac{1}{2}F(1+\pi)}$$