

Parameterdarstellung - Ebene Kurven

Eine Parametrisierung $t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ beschreibt den Ortsvektor einer Kurve. D.h. zu jedem Wert des reellen Parameters t gehört ein Punkt $(x(t), y(t))^T$ in der xy - Ebene. Diese Parametrisierungen sind nicht eindeutig, da man stets eine Substitution $t = f(s)$ durchführen kann und zu dem neuen Parameter s wechseln! Die Interpretation des Parameters ist bei gegebener Darstellung nicht sichtbar. Häufig beschreibt dieser Zeit, Winkel, Länge, etc.

Wichtige Kurven

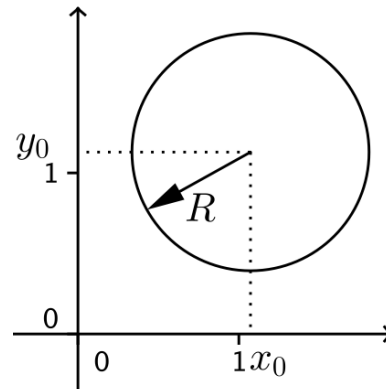
Kreis:

Mittelpunkt: (x_0, y_0)

Radius: R

Param. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cdot \cos t \\ y_0 + R \cdot \sin t \end{pmatrix}$

Implizit: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



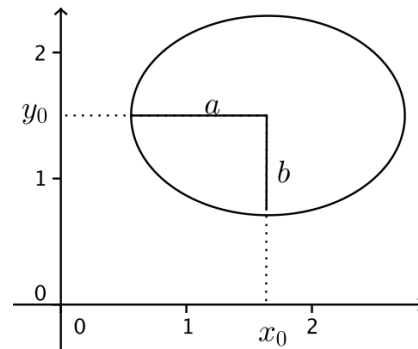
Ellipse:

Mittelpunkt: (x_0, y_0)

Halbachsen: a, b

Param.: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos t \\ y_0 + b \cdot \sin t \end{pmatrix}$

Implizit: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

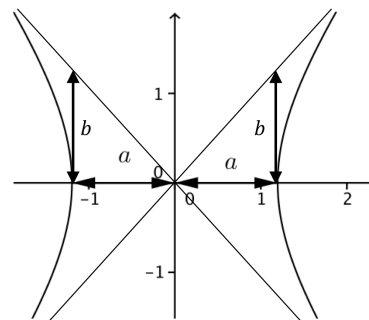


Hyperbel:

Steigung der Asyptoten: $\pm \frac{b}{a}$

Param.: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \pm a \cdot \cosh t \\ b \cdot \sinh t \end{pmatrix}$

Implizit: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Explizite Funktion $f(x)$:

Param.: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

Steigung, Tangential- & Normalvektor

Tangentialvektor: $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$

Ein Teilchen, das sich entlang der Ortskurve $\vec{r}(t)$ bewegt, hat zum Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$.

Steigung: $k = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Normalenvektor: $\vec{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$

Im 2D - Fall findet man einen Normalvektor zu einem anderen stets durch Vertauschen der Koordinaten und korrekter Wahl der Vorzeichen.

Givensrotation $G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Einheitsvektoren: $\vec{n}(t) = \frac{1}{|\vec{n}(t)|} \vec{n}(t)$

Jeder Vektor kann normiert werden, wenn man ihn durch seinen Betrag teilt.

Orthogonalität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0$

Parallelität: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 0$

Alte Prüfungsaufgabe:

Ein Kreis K mit Radius 1 rollt aussen auf der Ellipse $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$ ab. Man beschreibe die Kurve $\vec{\gamma}(t)$, welche der Mittelpunkt des Kreises K beschreibt.

Wir parametrisieren die Kurve indem wir zu dem Ortsvektor der Ellipse den Normalvektor mit Betrag des Radius 1 addieren. Also

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(t) + \frac{R}{|\vec{n}(t)|} \vec{n}(t)$$

Der Normalvektor muss nach aussen (rechts zeigen), d.h. wir nehmen

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} b \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}(t)| = \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}$$

Damit lautet die Kurve

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}} \begin{pmatrix} b \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

VORSICHT: Die Kurve ist keine Ellipse!

Von der Parameterdarstellung zur impliziten Darstellung

Idee: Uns stehen 2 Gleichungen $x(t)$ & $y(t)$ für 3 Unbekannte $\{x, y, t\}$ zur Verfügung. Wir versuchen den Parameter t aus diesem System zu eliminieren. Häufig werden hier trigonometrische Funktionen verwendet!

Beispiel 2:

Welche Kurve beschreibt die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (\frac{t}{t^2+1}, -\frac{1}{t^2+1})$? (Schreibe implizit!)

Wir dividieren beide Gleichungen

$$\frac{x}{y} = -t$$

Einsetzen gibt

$$x = \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$$

$$x = \frac{x}{y \cdot \frac{x^2+y^2}{y^2}}$$

$$x = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = y$$

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

Es handelt sich um einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$

Krümmung & Evolute

Bei gegebener Parametrisierung ist es einfach die Krümmung der Kurve zu bestimmen (diese ist *nicht* einfach nur durch die zweite Ableitung gegeben):

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Weiters kann man noch den Krümmungskreis (siehe Bild) betrachten. Dies ist derjenige Kreis, der die Kurve in einem gewissen Punkt am besten approximiert - sprich selbe Tangente und Krümmung. Für den Krümmungskreis gilt:

Radius:

$$r(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

Mittelpunkt:

$$M(t) = \left(x - \dot{y} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, y + \dot{x} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \right)$$

