

Theorie 12:

Uneigentliche Integrale:

Def.: Integral, das entweder Grenzen oder einen Integrationsbereich, die gegen Unendlich streben!

Bsp.: $\int \frac{1}{x^2} dx$ für $x > 1$

$$\Rightarrow \underline{I} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{x} \right|_1^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = 1$$

Schwerpunkt:

L> 1D: Betrachte einen Stab, der inhomogen mit Masse belegt ist. Der Schwerpunkt ist definiert als jener Punkt, um den es ein Momentengleichgewicht gibt.

Kraft, die in 'x' wirkt:

$$F(x) = \mu(x) \cdot g \cdot \Delta x$$

Moment um den Schwerpunkt:

$$M_{(x_s)}^{x_s} = F(x) \cdot d(x) = F(x) (x_s - x)$$

Verlange Momentengleichgewicht:

$$\sum_i M_{(x_s)}^{x_s} \stackrel{!}{=} 0 = \sum_i (x_s - x) \cdot \mu(x) \cdot g \cdot \Delta x$$

Übliches Vorgehen: Erhöhe Genauigkeit $\Delta x \rightarrow dx$ (und Rolle auf Konv.)

$$\sum_i (x_s - x) \mu(x) \cdot g \cdot \Delta x \rightarrow \int (x_s - x) \mu(x) g dx = 0$$

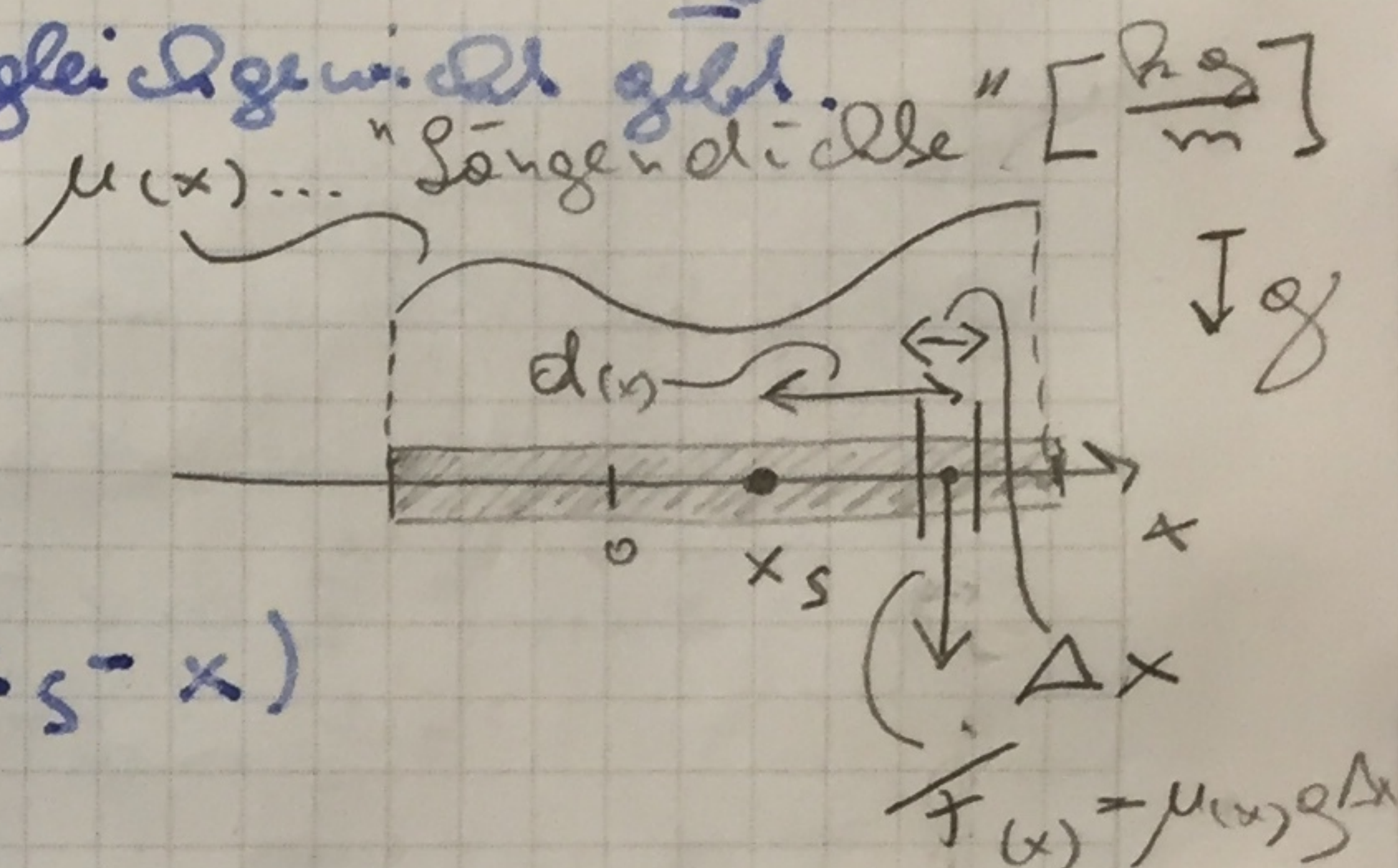
"Gravitationsbeschleunigung" g = konst. $\rightarrow$ Nimm heraus!

$$\int (x_s - x) \mu(x) dx = 0$$

$$\int x_s \mu(x) dx = \int x \mu(x) dx$$

Schwerpunkt ist konstant!

$$\text{Also: } x_s = \frac{\int x \mu(x) dx}{\int \mu(x) dx} \quad x_s \cdot \underbrace{\int \mu(x) dx}_{\text{"Gesamtmasse des Stabs"}} = \int x \mu(x) dx$$



L> jede andere Dimension, auf die man Bacht hat:

Komplett ident!

Flächenschwerpunkt: (= Schwerpunkt mit Dichte = 1)

L> z.B. 2D: "Moment" um Flächenmittelpunkt:

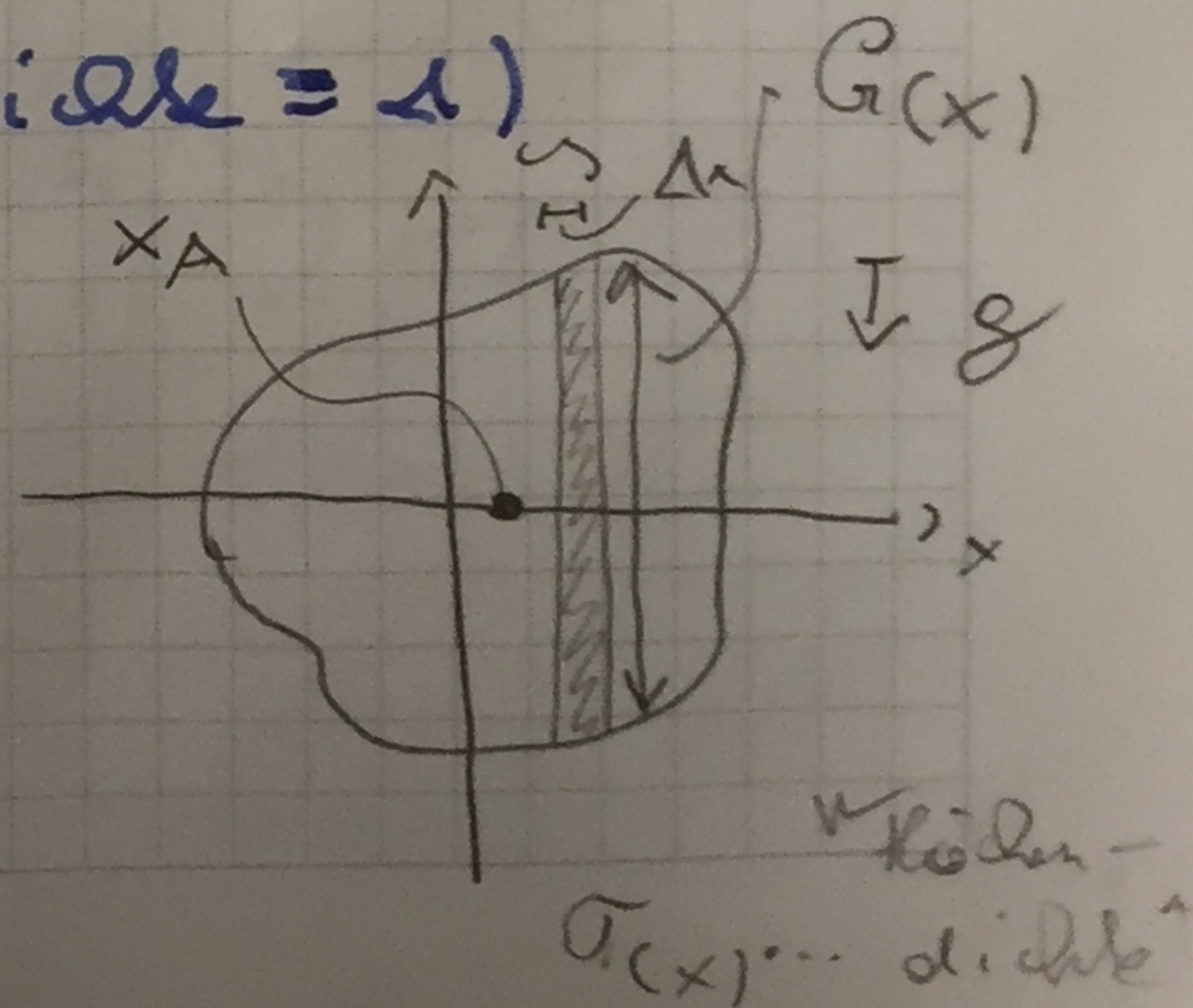
$$M_{(x_n)}^{x_n} = (x_n - x) \cdot \mu(x) \cdot G(x) \cdot \Delta x$$

Gleichgewicht: $\sum_i M_{(x_n)}^{x_n} \stackrel{!}{=} 0$

$$\sum_i (x_n - x) G(x) \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow dx} \int$$

$$\int x_n G(x) dx = \int x G(x) dx$$

$$x_n \int G(x) dx = \int x G(x) dx$$



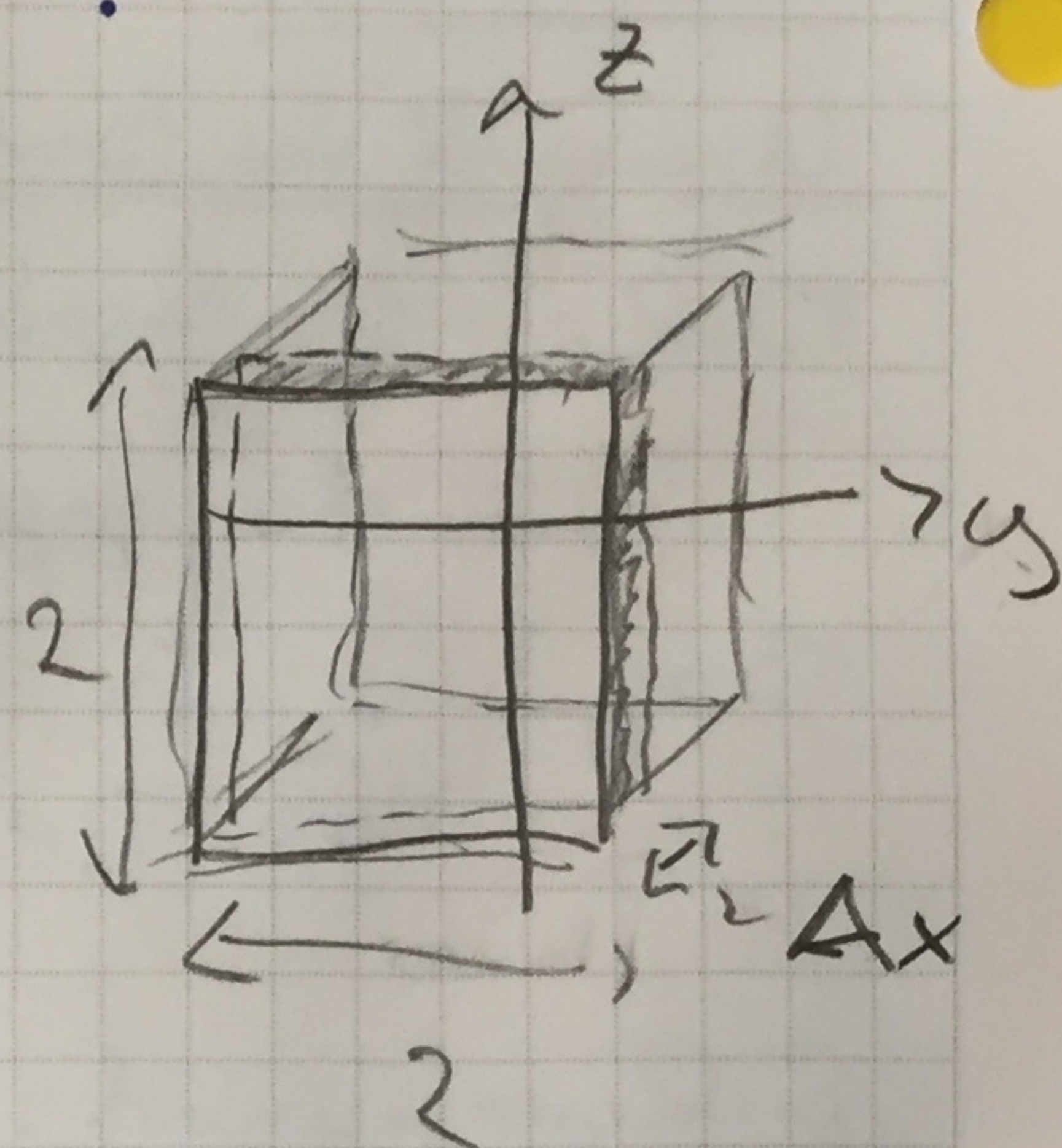
Bsp.: Würfel $(-1, -1, -1) \rightarrow (1, 1, 1)$, $\vec{S} = ?$

Dichte nimmt in x-Richtung zu mit

$$\rho(x) = (x+1)^2 \quad (\text{konstant in } y, z)$$

$y_s = z_s = 0$ (Symmetrie)
Formel: $x_s = \frac{\int_{-1}^1 \rho(x) x dx}{\int_{-1}^1 \rho(x) dx}$

$$M = \int_{-1}^1 \rho(x) dx = \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx = \dots$$



Trägheitsmoment:

Def.: Sei Körper in puren Rotation mit Winkelgeschw. $\omega \vec{e}_z$

Bestimme die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

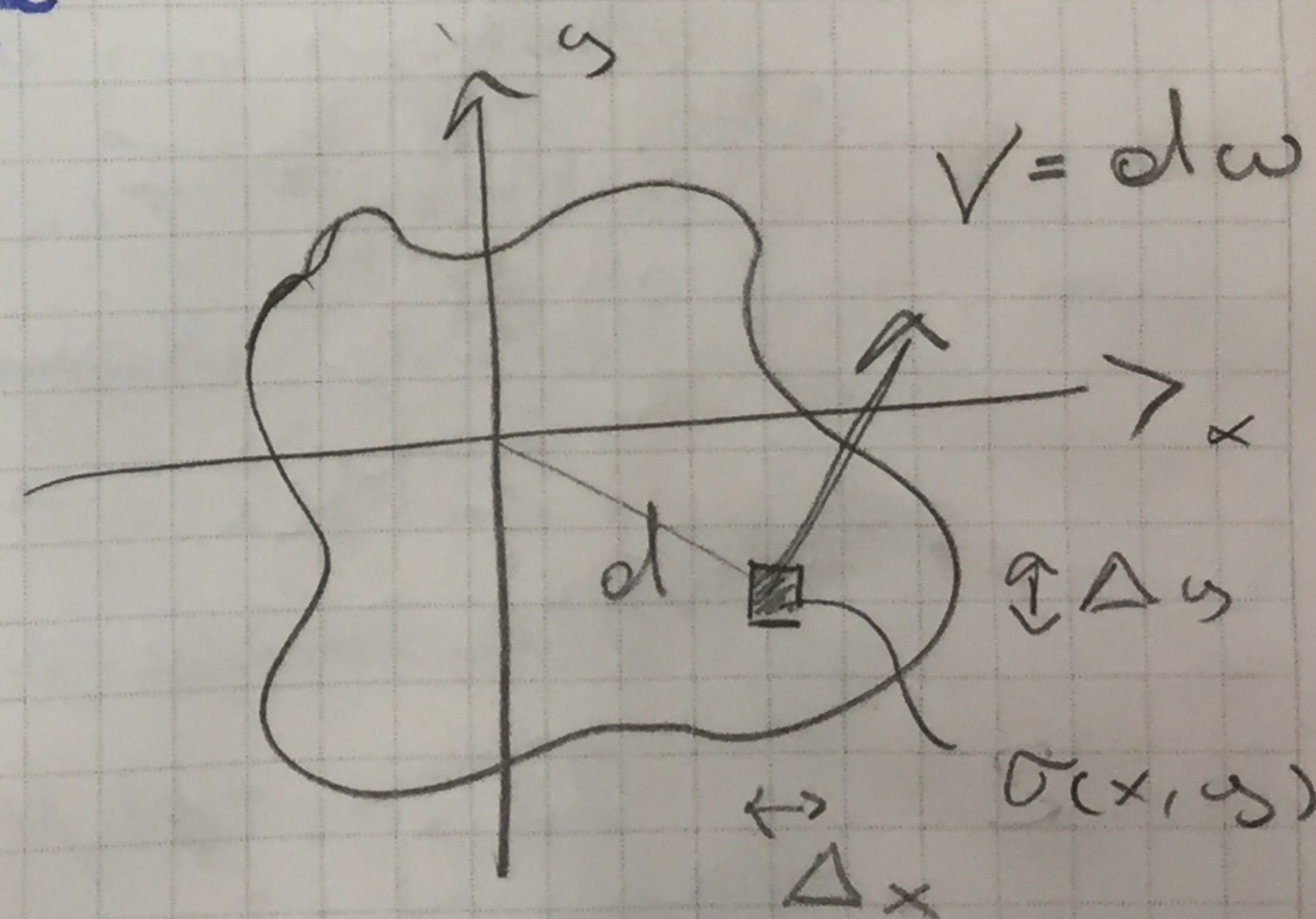
$$= \frac{1}{2} m d^2 \omega$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i \rho(x_i, y_i) d(x_i, y_i) \Delta x \Delta y}_{\text{"Trägheitsmoment"}}$$

"Trägheitsmoment"

Für $\Delta x, \Delta y \rightarrow dx, dy$

$$I_{zz} = \iint \rho(x, y) (x^2 + y^2) dx dy$$



Merke: $m(x, y) = \rho(x, y) \Delta x \Delta y$