

→ Evaluate

Theorie 9 - Integrationsregeln:

↳ Regeln: → Lineare Operation $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$

$$\rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Prinzipiell: Integration entlang der

Koordinatenrichtung! Sach

neg. Vorzeichen!

↳ Unbestimmte Integration: $\int f(x) dx$

Finde die allgemeine Stammfunktion $F(x) = \int f(x) dx$, s.d. $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

Bestimmte Integration: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ mit $F(x)$ wie oben

↳ Ableitungen von Integralen:

$$i) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$ii) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

iii) Leibniz-Regel: Veränderliche Grenzen

$$\frac{d}{dt} \int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t) dx = f(v(t), t) \cdot v'(t) - f(u(t), t) \cdot u'(t) + \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) dx$$

Beispiele: (Prüfungsaufgaben)

i) Die Funktionen $f(x) = \cos x$ & $g(x) = -\cos(x + \frac{1}{x})$ unterscheiden

nicht für $x > 0$ nur um eine additive Konstante. Wahr! Falsch?

Additive Konstante → f & g sind verschiedene Stammfunktionen

der gleichen Integranden → $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} g(x)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \frac{d}{dx} g(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Wahr!!!

ii) Auf welchem Intervall ist $f(x) = \int_0^x e^t \cos t dt$ konvex?

$$I = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}], I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}], I = [0; \frac{\pi}{2}]$$

Konvex $\Rightarrow f''(x) \geq 0$, $f'(x) = e^x \cos x$, $f''(x) = e^x (\cos x - \sin x)$

$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow \cos(x) \geq \sin(x) \Rightarrow$$

$$x \in [-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$$

iii) Berechne für $F(x,y) = \int_x^y f(t+y) dt$: $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$ & $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (-1) \cdot \int_x^y f(t+y) dt = -f(x+y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y): \text{Leibniz-Regel } u(y) = x, u' = 0, v(y) = y, v' = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = f(y+y) + \int_x^y \frac{\partial}{\partial y} f(t+y) dt$$

$$= f(2y) + f(2y) - f(x+y) = 2f(2y) - f(x+y)$$

↳ Kettenregel: $\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x))$

Bsp.: i) $\int \frac{1}{x \cdot \log x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} dx = \log(\log(x)) + \text{const.}$
 $\xrightarrow{g'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \log x} g'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \log x$

ii) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int (-\sin x) \cdot \frac{1}{\cos x} dx = -\log(\cos x) + \text{const.}$
 $\xrightarrow{g'(x) = -\sin x, g(x) = \cos x} g'(x) = -\sin x, g(x) = \cos x$

↳ Partielle Integration (Produktregel):

$(f \cdot g)' = f'g + fg' \Rightarrow \text{Integrieren} \Rightarrow fg = \int f'g - \int fg'$
 $\int fg' = f \cdot g - \int fg'$

Verwendung: Bei Integration eines Produkts aus einer leicht ableitenden

Funktion (Polynome) & leicht zu integrierenden Funktion (Bsp.:

Bsp.: i) $\int x^2 \cdot e^x dx$

$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - \int 2x e^x dx = e^x x^2 - 2[x e^x - \int e^x dx]$
 $= e^x x^2 - 2x e^x + 2e^x + \text{const.} = e^x(x^2 - 2x + 2) + \text{const.}$

ii) $\int_1^e \log x dx = \int_1^e 1 \cdot \log x dx = x \log x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$
 $= (e - 0) - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = \underline{\underline{1}}$

↳ Substitution:

Vorgehen: i) Substituiere einen Term $g(x) = u(x)$

ii) Leite ab: $\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) \cdot dx \rightarrow$ Beide Richtungen möglich!

iii) Setze alles ins Integral $\rightarrow$ Es darf kein x vorkommen!

(Δ Gegebenfalls Grenzen anpassen)

iv) Integriere nach u !

v) Falls keine Grenzen: Rücksubstitution!

Bsp.: i) $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

Substitution: $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dx}{du} = 2u \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ dx = 2u du \end{cases}$

$\int \cos(\sqrt{x}) dx = \int \cos(u) \cdot 2u du = 2u \sin u - \int 2 \sin u du$
 $= 2u \sin u + 2 \cos u = 2[\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})] + C$

ii) $\int_0^1 2x \cdot \cos(x^2) dx$

Subst.: $x^2 = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x dx$

$x=0 \Leftrightarrow u=0, x=1 \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow u = \frac{\sqrt{u}}{2} \Leftrightarrow u = \frac{u^2}{2}$

$\int_0^1 2x \cos(x^2) dx = \int_0^1 \cos(u) du = \sin u \Big|_0^1 = \underline{\underline{1}}$

Partialbruch-Zerlegung (PBRZ):

Wird verwendet um gebrochen rationale Funktionen zu vereinfachen!

Ausgangslage: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_0}$

Vorgehen:

- Zähler & Nenner Grad als Nenner $\rightarrow$ Polynomdivision und PBRZ nur für den Rest
- Finde die Nullstellen des Nennerpolynoms und zerlege es in die Linearfaktoren $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)$, $x_1, \dots, x_p$ NS
- Maße einen passenden Ansatz für jeden Linearfaktor
- Düre das! Lineare! GfG-Sys. (Koeffizienten-Vergleich)

Ansätze: Einfache NS:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Meßfache NS:

$$\frac{1}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

Komplexe NS:

$$\frac{1}{(x+1)(x+i)(x-i)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Bsp: $\int \frac{1+x}{x^3-7x^2+15x-9} dx$

PBRZ: $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \rightarrow$ Rollen: $x_1 = 1$

$$(x^3 - 7x^2 + 15x - 9)(x-1) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{1+x}{x^3-7x^2+15x-9} = \frac{1+x}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Gleichungssystem:

$$\frac{1+x}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + B(x-1)(x-3) + C(x-1)}{(x-1)(x-3)^2}$$

$$(1+x)$$

$$= A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x-1)$$

$$(1+x) = x^2 \cdot (A+B) + x \cdot (-6A-4B+C) + (9A+3B-C)$$

Koeff.-Vergleich: I: $A+B=0$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\text{II: } -6A - 4B + C = 1 \quad \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{III: } 9A + 3B - C = 1 \quad C = 2$$

$$\int \frac{1+x}{x^3-7x^2+15x-9} dx = \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} \right] dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + 2 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x-3) - \frac{2}{x-3} + \text{const} = \log\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}\right) - \frac{2}{x-3} + \text{const}$$