Mehrdimensionale Differentialrechnung

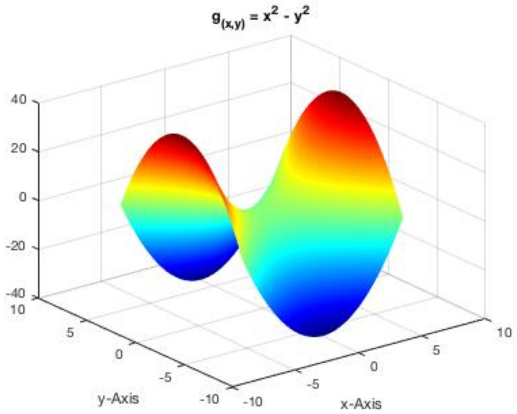
Eine Funktion mehrerer Variablen ordnet jedem Zahlentupel aus einem gewissen Bereich ein Skalar zu

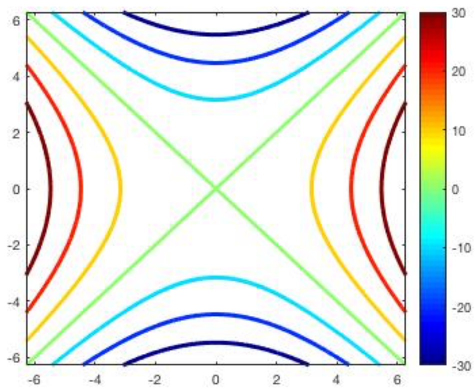
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Für den 2 dimensionalen Fall, kann man das auch noch mit Hilfe des Graphen leicht veranschaulichen, welcher eine Fläche im 3 dimensionalen Raum darstellt. Das Beispiel zeigt die Sattelfläche $g(x, y) = x^2 - y^2$. Ausserdem kann man neben dem Graphen eine zweite Möglichkeit der Darstellung sehen: Die Niveau- oder Höhenlinien. Sie sind auf der xy - Ebene eingezeichnet und entlang ihnen hat die Funktion einen konstanten Wert. Sie erfüllen also die Gleichung $g(x, y) = const$, welche nach y aufgelöst werden kann. Man kennt sie typischerweise von Landkarten. Dort sind auch Höhenunterschiede mit Hilfe von Niveaulinien eingezeichnet. Es gilt:

Starke Steigung: Niveaulinien liegen **eng**

Geringe Steigung: Niveaulinien sind **weit voneinander entfernt**





Für Funktionen höherer Dimensionen kann man keine Graphen mehr zeichnen. Bei 3 - dimensionalen Funktionen kann man sich noch mit Niveauflächen helfen, aber selbst der Graph benötigt schon einen 4 - dimensionalen Raum. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist die Temperaturverteilung in einem Zimmer. Eine Funktion $T(x, y, z)$ ordnet jedem Punkt in diesem Raum eine Temperatur zu.

Beispiel 1: Niveaulinien
$f(x, y) = x^2 + 4x + 3y^2$
Für eine Gleichung der Niveaulinien setzen wir einfach: $f(x, y) = c$. Quadratisch Ergänzen gibt

$$(x + 2)^2 - 4 + 3y^2 = c$$

Wenn man jetzt noch 4 auf die andere Seite gibt und eine neue Konstante einführt $\tilde{c} = c + 4$ hat man die implizite Darstellung der Niveaulinien gegeben.

$$(x + 2)^2 + 3y^2 = \tilde{c}$$

Das sind Ellipsen mit Mittelpunkt in $(-2, 0)$

Partielle Ableitungen

Eine partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ erhält man mit den exakt selben Regeln, wie im 1-dimensionalen Fall. Der einzige Unterschied liegt darin, dass all die Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als konstant betrachtet werden.

Beispiel 2: Partielle Ableitung
$f(x,y) = \sin^2(x-y) \cdot (x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin^2(x-y) + 2x^2\sin(x-y)\cos(x-y) + 2y^2\sin(x-y)\cos(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-2)x^2\sin(x-y)\cos(x-y) + 2y\sin^2(x-y) - 2y^2\sin(x-y)\cos(x-y)$$

Der Satz von Schwarz & Integrabilitätsbedingungen

Für zweifach partiell stetig differenzierbare Funktionen gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

Das heisst die Reihenfolge spielt bei gemischten Ableitungen keine Rolle. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass, falls partielle Ableitungen gegeben sind und die gemischten Ableitungen nicht übereinstimmen, keine solche Funktion existiert. Sie erfüllt die sog. Integrabilitätsbedingungen nicht!
Bemerkung: Der Satz von Schwarz gilt sogar für alle gemischten Ableitungen, d.h. $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

Beispiel 3: Prüfe ob eine Funktion für die gegebenen Ableitungen existieren kann. Finde die Funktion!
$f_x = e^x + e^y + 2xy\cos(x^2) + 6y$
$f_y = (x+1)e^y + \sin(x^2) + 6x$
Prüfe den SvS:

$$f_{xy} = e^y + 2x\cos(x^2) + 6$$

$$f_{yx} = e^y + 2x\cos(x^2) + 6$$

Das heisst $f_{xy} = f_{yx}$. Um $f(x,y)$ zu finden Integrieren wir einfach die gegebenen Ableitungen:

$$\int f_x dx = e^x + xe^y + y \cdot \int 2x\cos(x^2)dx + 6xy + C(y) = e^x + xe^y + y\sin(x^2) + 6xy + C(y)$$

$$\int f_y dy = e^y + xe^y + y\sin(x^2) + 6xy + C(x)$$

Durch Vergleichen der Terme findet man schliesslich:

$$f(x,y) = e^x + e^y + xe^y + y\sin(x^2) + 6xy + C$$

Die Konstante C nicht vergessen! Sie hängt jetzt von keinen Variablen mehr ab!

Gradient: $grad(f)$

Der Gradient sammelt einfach alle partiellen Ableitungen als Vektor:

$$grad\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Eine weit verbreitete Schreibweise ist mit Hilfe des sog. Nabla-Operators

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

sodass $grad(f) = \nabla f$. Der Nabla-Operator wird in der Vektoranalysis wieder auftauchen. Prinzipiell muss sehr genau auf seine Notation geachtet werden. Es ist nämlich ein Unterschied zwischen ∇f und dem Skalarprodukt $\nabla \cdot f$, weswegen ich persönlich zu den Schreibweisen $grad()$, $div()$, etc. rate. Aber dazu mehr in der Vektoranalysis.

Eigenschaften des Gradienten:

1. Der Gradient hat eine geringere Dimension als der Graph und hat mit diesem **NICHTS** zu tun (beliebter Fehler)
2. Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Richtungsableitung (entsprechend $-grad(f)$ in Richtung der minimalen Ableitung)
3. Der Betrag des Gradienten entspricht dem Wert dieser maximalen Richtungsableitung
4. Der Gradient steht senkrecht auf die Niveaulinien

Tangentialebenen

Die Linearisierung, d.h. Approximation erster Ordnung, einer 2 - dimensionalen Funktion ist eine Tangentialebene. Lässt sich die gekrümmte Fläche im Raum schreiben als $z = f(x, y)$ - bei 2D Funktionen immer der Fall - dann ist die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gegeben durch:

$$z = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

Fehlerrechnung

Ausgangspunkt ist hier eine Grösse C die von mehreren Parametern abhängt, sagen wir $C = f(a, b)$. Die Variablen (a, b) werden durch Messung bestimmt und man kennt die Messfehler, welche prinzipiell unterschieden werden in

Absoluter Fehler: Unterschied zwischen tatsächlichem und gemessenem Wert, üblicherweise mit Δa bezeichnet

Relativer Fehler: Absoluter Fehler bezogen auf den gemessenen Wert $\frac{\Delta a}{a}$

Man will jetzt C berechnen und die Auswirkungen der Messfehler auf die Grösse C wissen. Man macht dies nur ungefähr (lineare Approximation) über

$$\Delta C = \frac{\partial}{\partial a} f(a,b) \cdot \Delta a + \frac{\partial}{\partial b} f(a,b) \cdot \Delta b$$

Der relative Fehler der Messgrösse ist dann einfach $\frac{\Delta C}{C}$. Aufgaben dieser Art sind prinzipiell schnell zu lösen, nur werden die Ausdrücke rasch sehr kompliziert und die Hauptschwierigkeit ist das Vereinfachen der Terme.

Beispiel 4:
In einem Versuchsaufbau wollen wir das Trägheitsmoment ϑ eines Schwungrads bestimmen. Mit ein paar vereinfachenden Annahmen gilt für diesen speziellen Versuchsaufbau

$$\vartheta = \frac{2mgh}{\omega_0^2} - mR^2$$

wobei $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Bekannt sind g, h, R und gemessen werden T_0 sowie die Masse m. Die Ergebnisse der Messung seien $T_0 = \hat{T}_0$ sowie $m = \hat{m}$. Wie wirken sich Messfehler ΔT_0 und Δm auf das Ergebnis für das Trägheitsmoment aus?

Einsetzen der Definition der Winkelgeschwindigkeit gibt

$$\vartheta = f(T_0, m) = \frac{2mghT_0^2}{4\pi^2} - mR^2$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial}{\partial T_0} f = \frac{mghT_0}{\pi^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial m} f = \frac{ghT_0^2}{2\pi^2} - R^2$$

Und gemäss der Formel für die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung gilt

$$\Delta\vartheta = \frac{\hat{m}gh\hat{T}_0}{\pi^2} \cdot \Delta T_0 + \left(\frac{gh\hat{T}_0^2}{2\pi^2} - R^2\right) \cdot \Delta m$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Für das Bestimmen von Extrema haltet man sich am besten an das folgende **Rezept** und führt mit einer Tabelle Buch über die gefundenen Kandidaten:

1. Zeichne das Definitionsgebiet (sehr empfehlenswert bei 2D Funktionen)
2. Untersuche das Innere des Gebietes mittels:

$$grad(f) = \vec{0}$$

3. Untersuche den Rand des Gebiets

   Methode 1:
   Setze die Gleichung des Randes direkt in die Funktion ein. Eignet sich bei sehr einfachen Rändern, wie zum Beispiel Geraden, wo man eine Variable durch die andere ausdrücken kann. Die Funktion hängt jetzt nur noch von einer Variable ab, nach welcher abgeleitet werden kann. Die Ableitung wird Null gesetzt und durch Auflösen erhält man die kritischen Punkte. Formell sind Methode 1 und 2 ident, lediglich, dass mit einer Para-metrisierung allgemeinere Kurven beschrieben werden können. (Nur im 2D Fall empfehlenswert)

   Methode 2:
   Parametrisiere den Rand als $\vec{r} = (x_{(t)}, y_{(t)})$ und setze in die Funktion ein $f(x_{(t)}, y_{(t)})$. Sie hängt jetzt nur noch von diesem einen Parameter t ab, nach welchem abgeleitet werden kann. Anschliessend setzt man einfach die Ableitung Null. Die Parametrisierung ist oft sehr schwer und nur im 2D Fall zu empfehlen. Bei 3D Funktionen ist ja der Rand eine Fläche und hängt entsprechend von 2 Parametern ab, d.h. man müsste iterativ vorgehen.

   Methode 3: Lagrange Multiplikatoren (nicht prüfungsrelevant)
   Definiere eine Hilfsfunktion ϕ, sodass der Rand eine Niveaulinie (-fläche/ -menge, je nach Dimension) von ϕ darstellt. Es müssen nun in den kritischen Punkten die Normalvektoren an die Niveaulinien von ϕ und von f parallel sein, also

$$grad(f) = \lambda \cdot grad(\phi)$$

   wobei λ eine zu bestimmende Konstante ist. Diese vektorielle (i.A. nicht lineare) Gleichung ist noch nicht ausreichend für die Anzahl an Unbekannten. Die letzte Gleichung stellt der Rand selbst dar, der Punkt muss ja auf ihm liegen.

4. Untersuche die Eckpunkte, falls vorhanden
5. Bestimme aus allen Kandidaten Maxima und Minima

Beispiel 5: (Ränder einsetzen) Bestimme Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = xy$ auf dem Gebiet $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2| \quad |x|,|y| \in [0;1]\}$

1. D beschreibt ein Quadrat mit Eckpunkten $\{(1,1);(-1,1);(1,-1);(-1,-1)\}$ und Rändern gegeben durch $\{x = \pm 1; \quad y = \pm 1\}$
2. Für das Innere von D setzen wir

$$grad(f) = (y,x) \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

3. Setze die Ränder ein.
   (a) $x = 1 \quad \rightarrow \quad f(x = 1, y) = y = f(y)$
   Nun müssen die Extrema der Funktion bestimmt werden, die nun nur noch von einer Variablen abhängt. In diesem Fall handelt es sich um eine lineare Funktion, d.h. sie besitzt keine lokalen Extrema und die Extrema liegen auf den Eckpunkten.
   (b) $x = -1 \quad \rightarrow \quad f(x = -1, y) = -y = f(y)$
   Dasselbe passiert für alle anderen Ränder.
   (c) $y = 1 \quad \rightarrow \ldots$
   (d) $y = -1 \quad \rightarrow \ldots$
4. Die Eckpunkte haben wir bereits zu Beginn bestimmt.
5. Wir haben nun folgende Liste

Kritischer Punkt	Funktionswert
$(0,0)$	$f(0,0) = 0$
$(1,1)$	$f(1,1) = 1$
$(-1,1)$	$f(-1,1) = -1$
$(-1,-1)$	$f(-1,-1) = 1$
$(1,-1)$	$f(1,-1) = -1$

Das heisst alle globalen Extrema liegen auf den Eckpunkten:

Minima: $(-1,1),(1,-1)$ mit dem Wert (-1)
Maxima: $(1,1),(-1,-1)$ mit dem Wert 1

Beispiel 6: (Parametrisierung) Bestimme Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = xy$ auf dem Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}$

1. D beschreibt eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{2}$ und Mittelpunkt $(0, 0)$
2. Für das Innere von D setzen wir

$$grad(f) = (y, x) \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

3. Eine Parametrisierung des Randes von D, kurz ∂D, ist

$$\vec{r}_{(t)} = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Eingesetzt in die Funktion gibt das

$$f(x_{(t)}, y_{(t)}) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$$

$$\frac{d}{dt}f = 2\cos(2t) \stackrel{!}{=} 0$$

Die Gleichung hat die Lösungen

$$t = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Das entspricht den Punkten $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$

4. ∂D besitzt keine Eckpunkte, d.h. dieser Schritt fällt aus
5. Wir haben nun folgende Liste

Kritischer Punkt	Funktionswert
$(0, 0)$	$f(0, 0) = 0$
$(1, 1)$	$f(1, 1) = 1$
$(-1, 1)$	$f(-1, 1) = -1$
$(-1, -1)$	$f(-1, -1) = 1$
$(1, -1)$	$f(1, -1) = -1$

Das heisst alle Extrema liegen auf dem Rand:

Minima: $(-1, 1), (1, -1)$ mit dem Wert (-1)
Maxima: $(1, 1), (-1, -1)$ mit dem Wert 1

Beispiel 7: (Lagrange) Bestimme Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$ auf dem Rand des Gebietes $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}$
Wir springen gleich zu Schritt 3

3. Mit dem Vorgehen nach Lagrange $\phi(x,y) = x^2 + y^2$

$$grad(f) = \lambda \cdot grad(\phi)$$

$$(4x, 6 - 2y) = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

Wir haben jetzt das nichtlineare Gleichungssystem

I: $2x = \lambda x$
II: $6 - 2y = 2\lambda y$
III: $x^2 + y^2 = 16$

Wir müssen eine Fallunterscheidung machen (**NICHT** einfach x kürzen!!!)

1. Fall: $x = 0$
Aus III. folgt direkt $y = \pm 4$

2. Fall: $x \neq 0$
Aus I. kann unter dieser Bedingung x gestrichen werden
$\lambda = 2$, d.h. $y = 1$
Mit III. folg $x = \pm\sqrt{15}$

4. Keine Eckpunkte

5. Die Liste lautet

Kritischer Punkt	Funktionswert
$(0,4)$	$f(0,4) = 8$
$(0,-4)$	$f(0,-4) = -40$
$(\sqrt{15},1)$	$f(\sqrt{15},1) = 25$
$(-\sqrt{15},1)$	$f(-\sqrt{15},1) = 25$

Die Extrema sind:

Minimum: $(0,4)$ mit dem Wert (-40)
Maxima: $(\pm\sqrt{15},1)$ mit dem Wert 25

Eine anschauliche Erklärung des Verfahrens mit den Lagrange - Multiplikatoren findet man auf YouTube: Klicke hier