Mehrdimensionale Differentialrechnung 2

Quiz

Die Temperaturverteilung in einem Raum stellt eine 3 - dimensionale Funktion dar. Ihr Graph liegt im 4 - dimensionalen Raum, während die Niveaumengen Flächen im 3D Raum beschreiben.

Wahr

Berechne ∇f für $f(x,y) = x^y$. Nenne zwei wichtige Eigenschaften von ∇f!

∇f ist lediglich eine kompakte Schreibweise für $grad(f)$. Per Definition:

$$grad(f) = (\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f)$$

Wir müssen also die partiellen Ableitungen berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^y = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} x^y = \frac{\partial}{\partial y} e^{\log{(x^y)}} = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \cdot \log(x)} = \log{(x)} \cdot e^{y \cdot \log(x)} = \log{(x)} \cdot x^y$$

Das heisst der Gradient ist

$$grad(f) = (y \cdot x^{y-1}, \log{(x)} \cdot x^y)$$

Wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichnet.
Reminder: Die Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird bleiben konstant.

Eigenschaften des Gradienten: Er zeigt in Richtung der maximalen Ableitung und ist stets orthogonal auf Niveauflächen!

Finde den Normalvektor $\vec{n}$ an das Paraboloid $z = 2x^2 + \frac{1}{4}y^2$ im Punkt (x_0, y_0, z_0)

Wir wollen die Eigenschaft des Gradienten nutzen, dass dieser stets senkrecht auf die Niveauflächen steht. Dazu definieren wir uns eine Funktion $\phi(x,y,z)$, deren Niveaumenge das gegebene Paraboloid zu irgendeinem Niveau enthält (z.B. zum Niveau 0). D.h. es muss gelten, dass $\phi(x,y,z) = 0$ und $z = 2x^2 + \frac{1}{4}y^2$ dieselbe Gleichung darstellen. Eine solche Funktion wäre

$$\phi = 2x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z$$

Wenn wir jetzt noch den Gradienten im Punkt (x_0, y_0, z_0) aufstellen, so haben wir die Lösung! Also

$$\vec{n} = grad(\phi) = (4x_0, \frac{1}{2}y_0, -1)$$

Bemerkung: Das Niveau spielt keine Rolle, da eine Konstante beim Ableiten einfach wegfällt

Tangentialebene - Methode über den Gradienten

Eine Alternative die Tangentialebene zu finden, die sich sehr gut eignet, falls die Fläche in impliziter Darstellung, $f(x, y, z) = const$ gegeben ist, ist über den Gradienten. Zuerst definiert man sich eine Hilfsfunktion $\phi(x, y, z)$, sodass $f(x, y, z) = const$ eine Niveaufläche dieser Hilfsfunktion zum Niveau *const* darstellt. Man kann nun den Gradienten von $\phi(x, y, z)$ bestimmen, der stets normal auf $f(x, y, z) = const$ steht. Nun kann man die Tangentialebene an die Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0) aufstellen über:

$$grad(\phi) \cdot (x, y, z) = grad(\phi) \cdot (x_0, y_0, z_0)$$

Beispiel 1:
Finde die Tangentialebene an das Ellipsoid $4x^2 + 3y^2 + 8z^2 = 24$ in P = (1, 2, 1)

Zuerst denken wir uns das Ellipsoid als Niveaufläche einer Hilfsfunktion zum Niveau 24, also $\phi(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 8z^2$. Der Gradient dieser Funktion steht senkrecht auf unser Ellipsoid in jedem Punkt.

$$grad(\phi) = (8x, 6y, 16z)$$

Im Punkt P

$$grad(\phi)\Big|_P = (8, 12, 16)$$

Wir kennen jetzt den Normalvektor, sowie einen Punkt unserer Ebene, damit ist die Gleichung

$$grad(\phi)\Big|_P \cdot (x, y, z) = grad(\phi) \cdot P$$

$$(8, 12, 16) \cdot (x, y, z) = (8, 12, 16) \cdot (1, 2, 1)$$

$$8x + 12y + 16z = 48$$

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Richtungsableitung

Bei der Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion ist prinzipiell die *Richtung* nicht eindeutig. Bei den partiellen Ableitungen haben wir stets die Koordinaten-Achsen als Richtung genommen. D.h. wir haben gefragt: Wie ändert sich der Funktionswert, wenn ich mich weiter auf (zum Beispiel) der x-Achse bewege?
Die Berechnung der Ableitung in eine allgemeine Richtung, sagen wir des Vektors $\vec{e}_0$, ergibt sich aus dem Skalarprodukt

$$D_e f = \vec{e}_0 \cdot grad(f)$$

Wichtig dabei ist, dass $\vec{e}_0$ ein Einheitsvektor sein muss (beliebter Fehler)

Beispiel 2:
Berechne die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) = \frac{x}{y}+3z$ im Punkt $P = (8,2,2)$ in Richtung des Vektors $\vec{e} = (1,1,-1)$

Zuerst müssen wir den gegebenen Vektor mit seinem Betrag normieren, d.h.

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{|\vec{e}|}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

Der Gradient ausgewertet in P schreibt sich

$$grad(f)\Big|_P = (\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 3)\Big|_P = (\frac{1}{2}, -2, 3)$$

wodurch sich die Richtungsableitung

$$D_e f = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)(\frac{1}{2}, -2, 3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ergibt.

Verallgemeinerte Kettenregel

Im 1 - dimensionalen Fall kennen wir die Ableitung des Ausdrucks

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

über die Kettenregel. Ein Äquivalent dazu existiert auch im höher dimensionalen Fall. Gegeben sei eine Funktion $f(x,y)$. Nun wollen wir die Funktion nicht auf dem gesamten Definitionsgebiet betrachten, das heisst nicht über der gesamten xy - Ebene, sondern nur über einer bestimmten Kurve. Wir schränken also den Freiheitsgrad ein. Die Kurve sei parametrisiert mit $\vec{r}(t) = (x_{(t)}, y_{(t)})$. Dann besagt die allgemeine Kettenregel

$$\frac{d}{dt}f(x_{(t)}, y_{(t)}) = f_x(x_{(t)}, y_{(t)}) \cdot \dot{x}_{(t)} + f_y(x_{(t)}, y_{(t)}) \cdot \dot{y}_{(t)}$$

Eine kompaktere Schreibweise, die auch sofort klar macht, wie die Verallgemeinerung in höhere Dimensionen aussieht ist wie folgt: Sei jetzt $f(x_1, \ldots, x_n)$. Und die Kurve gegeben durch $\vec{r}(t) = (x_{1(t)}, \ldots, x_{n(t)})$. Die Ableitung ist das Skalarprodukt

$$\frac{d}{dt}f(x_{1(t)}, \ldots, x_{n(t)}) = grad(f) \cdot \dot{\vec{r}}_{(t)}$$

Den Ausdruck $\frac{d}{dt}f(x_{1(t)}, \ldots, x_{n(t)})$ nennt man auch totales Differential von f. Den Unterschied zwischen partieller und totaler Ableitung zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 3:
In der allgemeinen Mechanik ist der Lagrange - Formalismus ein mächtiges Tool um Bewegungsgleichungen für komplizierte Systeme aufzustellen. Falls keine verallgemeinerten Kräfte und keine *Constraints* wirken, gilt für die Lagrange - Funktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ und die verallgemeinerte Koordinate $\varphi = \varphi(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\mathcal{L}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{L} = 0$$

Für das Beispiel $\mathcal{L} = \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi + \cos\varphi$, schreibe obige Gleichung aus.

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{L} = -\dot{\varphi} \cdot \cos\varphi - \sin\varphi$$
$$\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\mathcal{L} = 2\dot{\varphi} - \sin\varphi$$

Jetzt können wir die totale Ableitung bilden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\mathcal{L}\right) &= \frac{d}{dt}\left(2\dot{\varphi} - \sin\varphi\right) \\ &= 2\ddot{\varphi} - \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\end{aligned}$$

Damit ist die Bewegungsgleichung für diese Situation gegeben durch die Differential - Gleichung

$$2\ddot{\varphi} - \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - (-\dot{\varphi} \cdot \cos\varphi - \sin\varphi) = 0$$
$$2\ddot{\varphi} = -\sin\varphi$$