Mehrdimensionale Integralrechnung 2

Quiz

Wir wollen die Dynamik zweier Teilchen beschreiben, die über ein hoch elastisches Seil verbunden sind und sich wild im Raum bewegen! Ein Kollege schlägt dazu vor ein Koordinatensystem an das eine Teilchen zu "kleben", um von dort aus die Bewegungsgleichungen aufzustellen. An einem Punkt in der Rechnung taucht ein Integral auf, das jetzt in diesem bewegten Koordinatensystem formuliert ist. Berechne die Jacobi Determinante, wenn die Transformations - Vorschrift von dem ruhenden zu dem bewegten System wie folgt gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

Wir versuchen intuitiv zu verstehen, was diese Transformation macht. Die erste Matrix ist eine Givensrotation um die z - Achse. Sie macht also, dass sich unser Koordinatensystem mit der Zeit dreht. Der zweite Term verschiebt lediglich das gesamte System mit der Zeit (um genau zu sein, wird der Ursprung entlang einer elliptischen Spirale verschoben). Das bedeutet es wird nichts gestaucht oder verzerrt. Die Jacobideterminante (der Verzerrungsfaktor) muss also 1 sein.

Wer dieser Argumentation keinen Glauben schenkt:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2t - y \cdot \sin 2t + 2\cos t \\ x \cdot \sin 2t + y \cdot \cos 2t + 3\sin t \\ z + t \end{pmatrix}$$

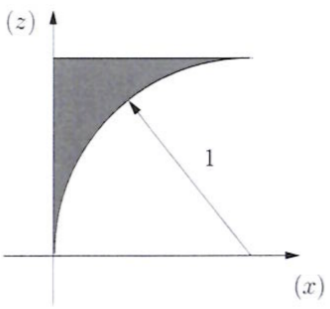
Die Jacobi Matrix dieser Transformation ist

$$J = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Determinante

$$det(J) = 1 \cdot (\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) = 1$$

Alte Prüfungsaufgabe: Man berechne das Volumen des Körpers, der bei der Rotation um die z-Achse des in der Figur schraffierten Gebiets entsteht.



Um das Volumen zu erhalten, können wir die konstante Funktion $f(x,y,z)=1$ über den Körper integrieren. Wir wollen das Problem in zylindrischen Koordinaten betrachten. Die Grenzen für ϕ und z sind schnell einzusehen. Die Koordinate ρ ist durch den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1,0)$ bestimmt

$$(x-1)^2+z^2=1 \to x=1\pm\sqrt{1-z^2}$$

Das richtige Vorzeichen ist hier $-$ und das zu berechnende Integral ist

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-z^2}}\rho\,d\rho\,dz\,d\phi=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-z^2}\right)^2\,dz=$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-2\sqrt{1-z^2}+1-z^2\right)\,dz=\pi\left(2-\frac{1}{3}-\int_0^1 2\sqrt{1-z^2}\,dz\right)$$

Für das letzte Integral machen wir eine Substitution $z=\sin u$ und $dz=\cos(u)\,du$. Damit erhalten wir die neuen Grenzen für u als

$$0=\sin u\to u=0\qquad 1=\sin u\to u=\frac{\pi}{2}$$

Wir haben also

$$V=\pi\left(\frac{5}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot\cos u\,du\right)=\pi\left(\frac{5}{3}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,du\right)$$

Dieses Integral können wir entweder partiell lösen, oder wir machen einen kurzen Blick in die Tabellen und finden

$$V=\pi\left(\frac{5}{3}-u+\sin u\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi^2}{2}$$

Koord. - Transformationen als vektorwertige Funktionen

Wenn wir ein Integral in kartesischen Koordinaten gegeben haben, sagen wir z.B.

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\qquad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$$

und dieses mit Hilfe einer Transformation lösen wollen, definieren wir uns implizit eine vektorwertige Funktion, die wir "vor" die eigentliche Funktion setzen. Bei einem Wechsel **von** kartesischen **in**, z.B. zylindrische Koordinaten wird das obige zu

$$\iiint_B f\cdot det(J)\,d\rho\,d\phi\,dz\qquad T\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(\rho,\phi,z)\mapsto(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$$

Wobei wir die Transformation hier T genannt haben. T ist eine vektorwertige Funktion. Sie bildet Vektoren aus dem einen Raum auf Vektoren in einem anderen Raum ab, ganz im Gegensatz zu skalaren Funktionen, die wir bis jetzt immer betrachtet haben, welche Vektoren aus einem Raum auf ein Skalar abgebildet haben. Um unnötige Schreibarbeit zu sparen wird meistens der Umweg über das kartesische System weggelassen und wir setzen die Abbildungen direkt ein: $(\rho,\phi,z)\mapsto f(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,z)$

Jacobi Matrix

Wir bleiben bei dem Beispiel des Wechsels von kartesischen in zylindrische Koordinaten (eine etwas kontraintuitive Bezeichnung). Die Abbildung ist

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}$$

Wobei wir $\vec{r}$ den Ortsvektor nennen. Zwei Fragen, die wir uns stellen können, die jeweils auf die Jacobi Matrix führen, sind:

1. Was sind die Basisvektoren in diesem neuen System
2. Was ist die Ableitung (das Differential) einer solchen Funktion

Die Vorschrift mit der wir diese Basisvektoren bestimmen lautet

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}|} \qquad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}|} \qquad \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}|}$$

Ausgerechnet gibt das

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} & |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}| &= \sqrt{\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)} = 1 \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} & |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}| &= \sqrt{\rho^2 \cos^2(\phi) + \rho^2 \sin^2(\phi)} = \rho \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & |\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}| &= 1
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Vektoren - in diesem Fall nur $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ - erst normiert werden müssen, bevor man sie als Basisvektoren verwenden darf. Dies legt nahe, dass in ihnen eine Art Information über die Verzerrung steckt, die durch die Transformation zustande kommt. Der Übersicht halber wird diese Information in Form einer Matrix gespeichert, die die Vektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$ als Spalten enthält. Dies ist die Jacobi-Matrix und es ist gleichzeitig das Differential der Funktion T.

Eigenschaften der Jacobi - Matrix

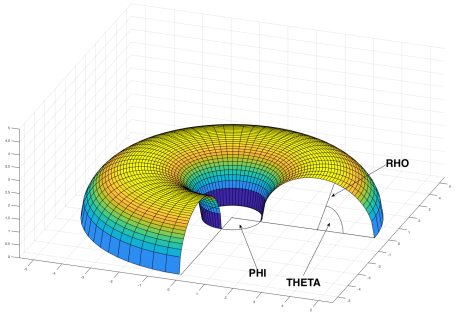
1. Enthält die nicht normierten Richtungsvektoren des "neuen" Koordinatensystems als Spatenvektoren
2. Ist die Vorschrift der Abbildung der neuen Differentiale auf die alten Differentiale (dies ist eine LINEARE Abbildung)
3. Ihre Determinante ist ein direktes Mass der Verzerrung
4. Die Jacobi-Matrix ist das Differential einer vektorwertigen Funktion

Noch weitere sehr kompakte aber trotzdem gut erklärte Informationen findet man in diesem Skript

Beispiel 1:
Wir betrachten einen Torus mit kleinem Radius r ($= \rho_{max}$) und grossem Radius R. In der Abbildung sind bereits Koordinaten eingeführt, mit denen sich dieser leicht beschreiben lässt. Finde

1. Die entsprechende Abbildungsvorschrift für die Transformation von kartesischen in Toruskoordinaten $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x(\rho, \phi, \theta), y(\rho, \phi, \theta), z(\rho, \phi, \theta))$
2. Die Basisvektoren dieses Koordinatensystems. Zeichne sie in der Skizze ein!
3. Die Jacobi Matrix, sowie ihre Determinante
4. Das Volumen des Torus

I.
Wir müssen also x, y und z als Funktionen von ρ, ϕ, und θ bestimmen. Mit reinen Geometrieüberlegungen



$$x = (R + \rho\cos\theta)\cos\phi$$

$$y = (R + \rho\cos\theta)\sin\phi$$

$$z = \rho\sin\theta$$

II.
Entsprechend der Vorschrift für die Basisvektoren

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad |\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}| = \sqrt{\cos^2\theta\cdot\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)+\sin^2\theta} = 1$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \begin{pmatrix}-(R+\rho\cos\theta)\sin\phi\\ (R+\rho\cos\theta)\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} \qquad |\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}| = \sqrt{(R+\rho\cos\theta)^2\cdot\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)} =$$

$$|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}| = (R+\rho\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}-\rho\sin\theta\cos\phi\\ -\rho\sin\theta\sin\phi\\ \rho\cos\theta\end{pmatrix} \qquad |\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}| = \sqrt{\rho^2\left(sin^2\theta+\cos^2\theta\right)} = \rho$$

Die Basisvektoren sind immer tangential an diejenigen Kurven die entstehen, wenn man die entsprechende Koordinate verändert und die anderen beiden konstant lässt.

III.
Die Jacobi - Matrix haben wir ja eben berechnet!

$$J = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right)$$

$$J = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi & -(R+\rho\cos\theta)\sin\phi & -\rho\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi & (R+\rho\cos\theta)\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta\end{pmatrix}$$

Ihre Determinante ist

$$det(J) = \sin\theta\cdot(\rho\sin\theta(R+\rho\cos\theta)) + \rho\cos\theta\cdot(\cos\theta(R+\rho\cos\theta))$$

$$det(J) = \rho(R+\rho\cos\theta)$$

Beispiel 1:
IV.
Wir brauchen jetzt nur noch einzusetzen und das dreifache Integral zu lösen!

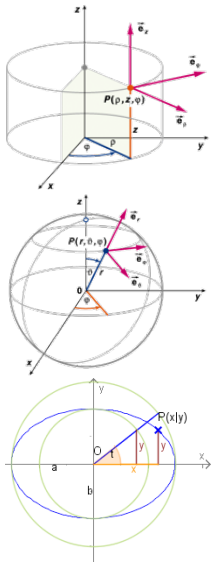
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \rho(R + \rho\cos\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Wir sehen, dass wir einen Cosinus von 0 bis 2π integrieren, was bedeutet, dass dieser Term komplett wegfällt und wir bekommen

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R r^2\, d\theta = 2\pi^2 R r^2$$

Häufige Transformationen

Zylinderkoordinaten		
$x = \rho\cos\phi$ $y = \rho\sin\phi$ $z = z$	$0 \le \rho$ $0 \le \phi < 2\pi$ $z \in \mathbb{R}$	$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$
Kugelkoordinaten		
$x = \rho\sin\theta\cos\phi$ $y = \rho\sin\theta\sin\phi$ $z = \rho\cos\theta$	$0 \le \rho$ $0 \le \theta \le \pi$ $0 \le \phi < 2\pi$	$dV = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi$
$x = \rho\cos\theta\cos\phi$ $y = \rho\cos\theta\sin\phi$ $z = \rho\sin\theta$	$0 \le \rho$ $0 \le \phi < 2\pi$ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$dV = \rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi$
Elliptische Koordinaten		
$x = a \cdot r\cos\phi$ $y = b \cdot r\sin\phi$ $z = z$	$0 \le r$ $0 \le \phi < 2\pi$ $z \in \mathbb{R}$	$dV = a \cdot b \cdot r\, dr\, d\phi\, dz$



ACHTUNG: Bei elliptischen Koordinaten ist ϕ nicht der Phasenwinkel (in der Skizze heisst dieser t)

Der Satz von Steiner (Parallel - Axis - Theorem)

Das Trägheitsmoment eines Körpers bezügliche einer Achse besitzt keine physikalische Bedeutung im eigentlichen Sinne. Wenn man die Bewegungsgleichungen für einen 3D Körper aufstellt, ist es einfach ein Term der auftaucht, sobald Rotation ins Spiel kommt (Wird im 3. Semester in der Mechanik III ausführlich behandelt). Am ehesten trifft es die Interpretation, dass es ein Mass dafür ist, wieviel Widerstand der Körper einer Rotationsbeschleunigung um besagte Achse entgegensetzt. Man berechnet es nach der altbekannten Formel, indem man den Abstand im Quadrat eines jeden Massenelementes über diesen Körpers integriert. Zum Beispiel für das Trägheitsmoment um die z - Achse

$$J_z = \iiint_B (x^2 + y^2) dm = \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot \rho_{(x,y,z)}\, dV$$

Ein praktisches Tool bei der Berechnung solcher Trägheitsmomente von komplizierten Strukturen ist der Satz von Steiner. Er besagt

$$J_a = J_a^{CM} + m \cdot d^2$$

$J_a \ldots$ TM um die Achse a
$J_a^{CM} \ldots$ TM um die Achse parallel zu a und durch den Schwerpunkt
$d \ldots$ Abstand der beiden Achsen

Beispiel 2:
Berechne das TM einer asymmetrischen Hantel (Radien R_1 & R_2, homogene Dichte, Massen m_1 & m_2, Abstand der Mittelpunkte sei d) um eine Achse durch den Schwerpunkt, wobei die Verbindung der Kugeln vernachlässigt werden kann.
I:
Zuerst müssen wir den Schwerpunkt finden. Seien x_1 und x_2 die Abstände der Mittelpunkte der Kugeln zum Schwerpunkt. Per Definition muss bezüglich dieses Punktes Momentengleichgewicht herrschen

$$g \cdot m_1 \cdot x_1 = g \cdot m_2 \cdot x_2$$

Von der Geometrie

$$x_1 + x_2 = d$$

Damit finden wir

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d \qquad x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot d$$

II.
Mit einem Blick auf die Formelsammlung finden wir das TM einer homogenen Kugel durch den Mittelpunkt als $J_{Kugel} = \frac{2}{5} m R^2$ Wir verschieben jetzt die Achsen in den Schwerpunkt der Hantel

$$J_1 = J_{Kugel} + m_1 \cdot x_1^2 = \frac{2}{5} m R_1^2 + m_1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d \right)^2$$

$$J_2 = J_{Kugel} + m_2 \cdot x_2^2 = \frac{2}{5} m R_2^2 + m_2 \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot d \right)^2$$

Wir haben jetzt die Trägheitsmomente der beiden Kugeln bezüglich derselben Achse (durch den Schwerpunkt), d.h. jetzt dürfen wir einfach addieren.

$$J_{ges} = J_1 + J_2$$