Vektoranalysis 1

Einführung

Stellen wir uns vor, wir wollten die Eigenschaften eines Gases beschreiben, das aus sich bewegenden Molekülen im Raum besteht. Für die verschiedenen Arten von Informationen über das Gas benötigen wir verschiedene mathematische Tools.

Skalarfeld ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
Ein Skalarfeld ordnet einem Vektor, z.B. (x, y, z), eine Zahl (ein Skalar) zu. Ein klassisches Beispiel ist die Temperaturverteilung. Für unser Gas wären z.B. die kinetische Energie eines jeden Teilchens, oder der Druck Grössen, die sich mit einem Skalarfeld beschreiben lassen.

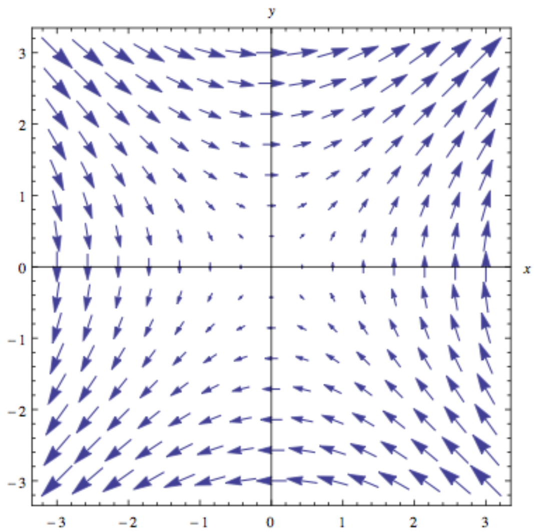
Vektorfeld ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)
Ein Vektorfeld (= vektorwertige Funktion) hingegeben bildet Vektoren des einen Raums (Urbildraum), (x, y, z) auf Vektoren eines anderen Raums ab, z.B. $(u_{(x,y,z)}, v_{(x,y,z)}, w_{(x,y,z)})$. Für unser Gas könnten wir damit die Geschwindigkeit, der einzelnen Moleküle in jedem Punkt modellieren.

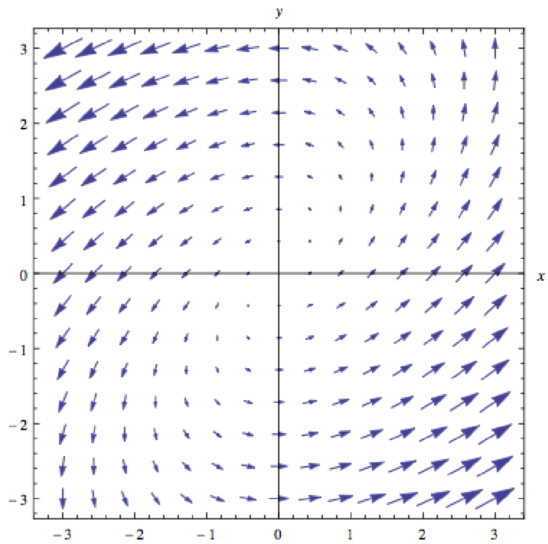
Stationarität
Von einem **stationären** Vektorfeld spricht man, wenn dieses nicht von der Zeit abhängt. Ein **instationäres** Vektorfeld hingegen ändert sich mit der Zeit. Wir betrachten fast ausschliesslich stationäre Felder.

Homogenität
Ein Vektorfeld heisst homogen, falls Richtung, sowie Betrag nicht vom Ort abhängen. Das heisst alle Vektoren des Urbildraumes werden auf denselben Vektor im Zielraum abgebildet

Feldlinien
Feldlinien sind Kurven, die in jedem Punkt (und zu jedem Zeitpunkt) tangential an das Vektorfeld liegen. Wenn man als Beispiel das Geschwindigkeitsfeld unseres Gases nimmt, dann würden Feldlinien den Weg beschreiben, den ein Teilchen zurückgelegt hat. Allerdings müssen Feldlinien nicht "korrekt parametrisiert" sein, in dem Sinne, dass der Betrag der Ableitung dieser Kurve nicht dem des Vektorfeldes in diesem Punkt entsprechen muss. Ob Richtungssinn ebenfalls übereinstimmen muss oder nicht, ist oft verschieden definiert.
Für stationäre Felder schneiden sich die Feldlinien nie! Dies gilt nicht mehr für instationäre Felder.
Um Feldlinien zu berechnen muss man Differentialgleichungen lösen. Dazu mehr gegen Ende des Semesters.

Beispiel 1:
Finde die passenden Funktionen zu den gezeigten Vektorfeldern





1. $\vec{v} = (y, x)$
2. $\vec{v} = (x - y, x)$
3. $\vec{v} = (0, x^2)$
4. $\vec{v} = (2x, -y)$

1. $\vec{v} = (y, x)$
2. $\vec{v} = (x - y, x)$
3. $\vec{v} = (0, x^2)$
4. $\vec{v} = (2x, -y)$

Lösung:
Man kann dies einfach per Ausprobieren lösen. Zu dem linken Vektorfeld passt $\vec{v} = (y, x)$, während das Rechte von $\vec{v} = (x - y, x)$ beschrieben wird.

Der Nabla Operator & Anwendungen

Der Nabla Operator ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Wie für alle Operatoren wirkt er auf das, was rechts von ihm steht.

Gradient

$$grad(f) = \vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)$$

Mit Hilfe des Nabla Operators können wir den altbekannten Gradienten ausdrücken. Zu bemerken ist hier, dass zwischen $\vec{\nabla}$ und f KEIN $\cdot$ steht, was einem Skalarprodukt entspräche. Der Gradient ordnet einem Skalarfeld ein Vektorfeld zu!

Divergenz

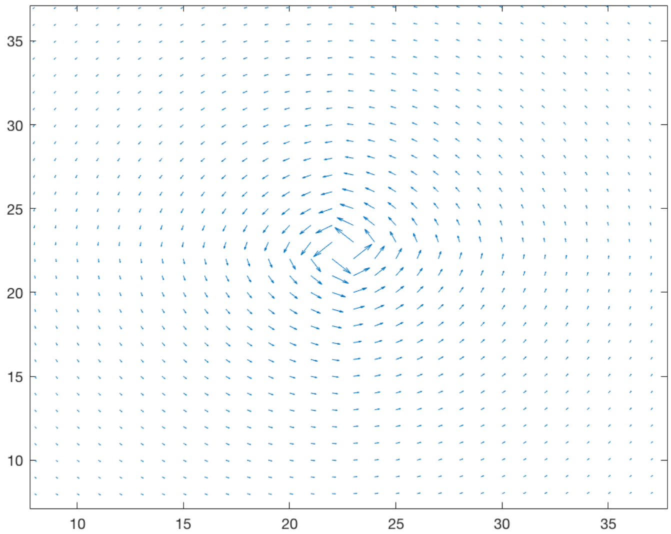
$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3$$

Die Divergenz ist ein Mass dafür wie stark die Vektoren in einem Punkt von einander weg zeigen und somit angeben an welchen Punkten etwas "erzeugt", $div(\vec{v}) > 0$, bzw. "vernichtet", $div(\vec{v}) < 0$, wird! Ein Beispiel wäre das elektrostatische Feld. Eine der vier Maxwell Gleichungen besagt, dass die Divergenz des elektrischen Feldes direkt proportional zur Ladungsdichte ist. D.h. an Orten wo Ladungen sitzen, wird ein elektrisches Feld "erzeugt" (bei positiven Ladungen) bzw. vernichtet (bei negativen Ladungen).
Die Divergenz ordnet einem Vektorfeld ein Skalarfeld zu.

Rotation

$$rot(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{3y} - v_{2z} \\ v_{1z} - v_{3x} \\ v_{2x} - v_{1y} \end{pmatrix}$$

Die Rotation lässt sich, wie der Name vermuten lässt, mit einer Winkelgeschwindigkeit assoziieren. Im Fall eines 2D Feld kann man das anschaulich interpretieren: Fassen wir das Feld als Geschwindigkeitsfeld eines Fluids auf. Wirft man jetzt einen winzig kleinen Korken in die zu untersuchende Strömung, dann wird sich dieser Korken um seine eigene Achse drehen mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der Hälfte des Betrags von $rot(\vec{v})$ entspricht.
Zum Beispiel eine homogene Strömung ist wirbelfrei, ein darin schwimmender Körper wird sich nicht um die eigene Achse drehen. Ein sogenannter Potentialwirbel (siehe Bild) ist ebenfalls wirbelfrei. Zwar wird sich der Korken um das Zentrum des Potentialwirbels drehen, nicht aber um seine eigene Achse!
Die Rotation ordnet also einem Vektorfeld ein Vektorfeld zu.



Beispiel 2:
Prüfe ob es sich bei der Kurve $y = \frac{1}{x}$ um eine Feldlinie des Vektorfeldes $\vec{v} = (\frac{1}{y}, -\frac{1}{x})$ handelt.

Nach der Definition der Feldlinien müssen also in jedem Punkt der Kurve die Feldvektoren tangential an diese liegen. Wir wollen zuerst einen Vektor berechnen von dem wir wissen, dass er tangential an die Kurve liegt. Dazu ist es vorteilhaft eine Parametrisierung der Kurve zu haben. In unserem Fall ist eine naheliegende

$$\vec{r}_{(t)} = \left(t, \frac{1}{t}\right) \qquad \dot{\vec{r}}_{(t)} = \left(1, -\frac{1}{t^2}\right)$$

$\dot{\vec{r}}_{(t)}$ ist ja gerade der gesuchte Tangentialvektor. Es müssen also die Vektoren $\vec{v}(\vec{r}_{(t)})$ und $\dot{\vec{r}}_{(t)}$ parallel sein. Dies kann bestätigt werden, wenn das Gleichungssystem

$$\vec{v}(\vec{r}_{(t)}) = \lambda \dot{\vec{r}}_{(t)}$$

erfüllt ist. Und in der Tat sind

$$t = \lambda$$
$$-\frac{1}{t} = \lambda \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

die selben Gelichungen, womit gezeigt wäre, dass es sich um Feldlinien handelt.

Tipps zur Aufgabe 8:

1. Überlege zunächst wie viele freie Parameter das Endresultat haben wird. Was ist die Parameterdarstellung einer Geraden? Gibt es ein Tool um diese um die z - Achse zu rotieren (Aufgabe 7)?
2. Es geht darum die Parameter zu eliminieren! Hint: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
3. Siehe alte Serien
4. Behandeln wir nächste Woche genauer! Aber das wichtigste:
   Aus Teil a) kennen wir die Parametrisierung der Fläche $\vec{r}(u, v) = \ldots$
   Die Oberfläche lässt sich dann mit dem Integral berechnen

   $$O = \iint ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| du\, dv$$