Oberflächen im Raum

Rezept

Wir interessieren uns für die Fläche einer ganz allgemeinen gekrümmten Fläche im 3D Raum. Dafür kann man nach folgendem Rezept vorgehen.

1. Bestimme eine Parameterdarstellung $\vec{r}(u, v)$ der Fläche. Da es sich um eine Fläche handelt (also ein 2D Objekt) benötigen wir für die Parametrisierung 2 Parameter.
2. Bestimme das Kreuzprodukt $||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||$ (Es handelt sich hierbei um eine Art Verzerrungselement, siehe *Alternativer Ansatz*)
3. Die Oberfläche lässt sich berechnen mittels der Formel

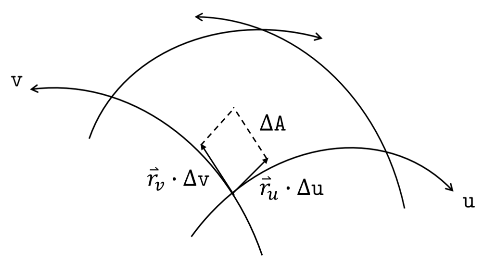
$$O = \iint ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| du\, dv$$

Tipp: Falls die Fläche explizit gegeben ist, z.b. durch $z = f(x, y)$ ist eine einfache Parametrisierung

$$\vec{r}(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

Geometrische Herleitung

Wie es zu obiger Formel kommt, können wir uns mit ein wenig Geometrie und den üblichen Tricks der Integralrechnung überlegen. Wir unterteilen die zu berechnende Fläche in eine Summe kleinerer Flächen ΔA, die jeweils von den zwei Tangential - Vektoren an die Parameterlinien aufgespannt werden (Siehe Skizze).



Wir wissen, wie man die Tangential - Vektoren berechnet, nämlich einfach als die partiellen Ableitungen $\vec{r}_u$ bzw. $\vec{r}_v$. Die Länge können wir festlegen, indem man mit Δu bzw. Δv multipliziert. Damit können wir den Flächeninhalt von diesem kleinen Teilstück berechnen, indem wir das Kreuzprodukt bilden und den Betrag davon nehmen.

$$\Delta A = ||\vec{r}_u \Delta u \times \vec{r}_v \Delta v|| = ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

Jetzt können wir für die gesamte Fläche einfach alle Teilstücke nehmen und summieren. Wenn wir wie üblich immer kleinere Teilstücke für die Berechnung nehmen und den Fehler, den wir mit den obigen Näherungen machen Stück für Stück reduzieren landen wir letztendlich bei einer unendlichen Summe von infinitesimalen Elementen (*aka* einem Integral).

$$A = \sum \Delta A = \sum ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| \cdot \Delta u \cdot \Delta v \quad \xRightarrow[\Delta u \Delta v \to du\, dv]{} \quad A = \iint ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| du\, dv$$

Alternativer Ansatz (nicht prüfungsrelevant)

Wir wissen bereits wie man den Flächeninhalt eines ganz allgemeinen ebenen Gebiets berechnet. Dafür haben wir einfach die konstante Funktion $f(x,y) \equiv 1$ über das gesuchte Gebiet integriert. Den gleichen Ansatz können wir auch für die Berechnung von Oberflächen im Raum wählen. Wenn wir doch nur wüssten, wie man ein Gebietsintegral über ein *krummes* Gebiet ausführt!?
Die Antwort hierfür kennen wir aber eigentlich auch schon, nämlich machen wir das mit einer Koordinaten Transformation. Der Unterschied zu früher ist, dass wir nicht mehr eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ haben, sondern, weil wir ja nur eine Fläche, also ein 2 - dimensionales Etwas, beschreiben möchten, eine Abbildung der Art $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Diese Abbildung (Transformation, vektorwertige Funktion, was auch immer) nennt man *Parametrisierung* der Oberfläche.
Wenn die Parametrisierung, also die Transformation, gefunden ist, müssen wir noch den Verzerrungsfaktor bestimmen. Dieser war ja genau die Determinante der Jacobimatrix.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x_{(u,v)} \\ y_{(u,v)} \\ z_{(u,v)} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{J}}_{(T)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

Das Problem ist nun, dass die Determinante einer $\mathbb{R}^{3\times 2}$ Matrix gar nicht definiert ist. Einen Ausweg bietet die Gram'sche Determinante, die definiert ist als

$$Gram(A) = \sqrt{det(A^T A)}$$

und eine sehr ähnliche Aussagekraft wie die Jacobi - Determinante besitzt. Es gilt nämlich:

$$dA = Gram(\underline{\underline{J}}_{(T)})\, du\, dv$$

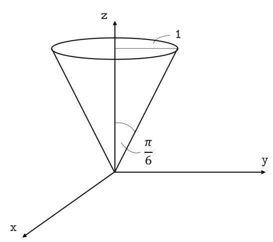
Wir können also die gesuchte Oberfläche schreiben als

$$O = \iint_B 1 \cdot Gram(\underline{\underline{J}}_{(T)})\, du\, dv = \iint_B 1 \cdot ||r_u \times r_v||\, du\, dv$$

Wichtig zu bemerken ist, dass beide Methoden das exakt selbe Ergebnis liefern!

Beispiel 1:

Bestimme eine Parametrisierung, sowie den Flächeninhalt eins geraden Drehkegels mit Öffnungswinkel $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ und Grundkreisradius $R = 1$. Siehe Skizze!



Für die Parametrisierung bieten sich dieselben Parameter wie für Kugelkoordinaten an. Aus der Skizze lesen wir ab, dass gilt $\vartheta = \frac{\pi}{6}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, \frac{R}{\sin\vartheta}] = [0, 2]$. Entweder durch geometrische Überlegungen oder über die Tatsache, dass die Mantelfläche des Drehkegels gerade eine Koordinatenfläche für ein fixes ϑ darstellt, finden wir eine Parametrisierung des Drehkegels.

Wir verwenden den letztgenannten Ansatz. Die gewöhnliche Transformation von kartesischen in sphärische Koordinaten lautet

$$\vec{r}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi,\vartheta) \\ y(r,\varphi,\vartheta) \\ z(r,\varphi,\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Um die Mantelfläche des Drehkegels zu erhalten müssen wir lediglich die Bedingung für ϑ einsetzten. Damit erhalten wir die gesuchte Parametrisierung als

$$\vec{r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r\cos\varphi \\ \frac{1}{2}r\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r \end{pmatrix}$$

Um die Fläche zu bestimmen halten wir uns an das Rezept.

$$||\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi|| = \frac{1}{2}r \quad \Rightarrow \quad O = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{2}r dr\, d\varphi = 2\pi$$

Beispiel 2 (nicht prüfungsrelevant):
Finde einen Ausdruck für die Oberfläche desjenigen Teils der 2D Gauss'schen Glockenkurve $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, die über dem Einheitskreis liegt. Verwende die Jacobi - Matrix!

In einem ersten Schritt müssen wir die Fläche parametrisieren. Da es sich um ein radial symmetrisches Problem handelt, sind Polarkoordinaten vermutlich gut geeignet. D.h. wir schreiben

$$T : (\rho,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ e^{-\rho^2} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{J}}_{(T)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ -2\rho e^{-\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Gram'sche Determinante ist

$$\underline{\underline{J}}^T_{(T)}\underline{\underline{J}}_{(T)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & -2\rho e^{-\rho^2} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ -2\rho e^{-\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{J}}^T_{(T)}\underline{\underline{J}}_{(T)} = \begin{pmatrix} 1+4\rho^2 e^{-2\rho^2} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \qquad Gram(\underline{\underline{J}}_{(T)}) = \rho\sqrt{1+4\rho^2 e^{-2\rho^2}}$$

Wir können somit unsere Oberfläche schreiben als

$$O = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2 e^{-2\rho^2}}\, d\rho\, d\varphi$$

Leider besitzt dieses Integral keine geschlossene Lösung, d.h. wir können es nicht mit elementaren Funktionen ausdrücken, weswegen wir das (unbefriedigende) Resultat stehen lassen müssen und weitere Berechnungen nur numerisch durchführen können.

Vektoranalysis 2

Der Fluss Φ

Eine Grösse die zur Beschreibung schier endlos vieler physikalischer Beobachtungen benötigt wird, ist der Fluss eines Vektorfeldes. Wenn man das Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld einer Strömung interpretiert, dann wäre der Fluss die Antwort auf z.B. die Frage:

Welches Volumen des Fluids fliesst pro Zeit durch eine gewisse Fläche?

Die physikalische Interpretation wird später (Fluiddynamik, oder in der Elektrodynamik in Physik I) relevant. In Analysis II wollen wir uns darum kümmern, wie man diese Grösse eigentlich berechnet. Dafür gibt es zwei Methoden:

1. **Bei einfachen Flächen**
   Per Definition, ist der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{v}$ durch eine Fläche B
   $$\Phi = \iint_B \vec{v}\, d\vec{A} = \iint_B \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{VORSICHT: } |\vec{n}| = 1$$
   Abgesehen von Spezialfällen kann man die Definition nur bei Flächen parallel zu Koordinatenflächen für die Berechnung anwenden
2. **Bei parametrisierten Flächen**
   Falls die Fläche, durch die der Fluss berechnet werden soll, etwas komplizierter ist, kann ist von Vorteil sein mit Parametrisierungen $(u, v) \mapsto \vec{r}_{(u,v)}$ zu arbeiten. Der Fluss ist dann
   $$\Phi = \iint_B \vec{v}(\vec{r}_{(u,v)}) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\; du\, dv$$
   Merke: $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ist der Normalvektor an die Fläche im Punkt (u, v). Er muss nicht normiert werden, da sein Betrag gerade dem Verzerrungselement entspricht, das von der Transformation kommt, die wir implizit machen. D. h. der Betrag kürzt sich weg.
   Je nachdem in welche Richtung der Fluss zu berechnen ist, muss das Vorzeichen passend gewählt werden.

Eigenschaften:

1. Der Fluss ist additiv. Der Fluss durch einen Würfel ist die Summe der Flüsse durch dessen Seiten.
2. Bei der Berechnung des Flusses, spielen nur die Projektionen der Feldvektoren auf den Normalvektor der Fläche eine Rolle (Skalarprodukt)!
3. Wenn man den Fluss durch eine Fläche von der anderen Seite haben möchte, setzt man einfach ein negatives Vorzeichen vor den alten Fluss.

Beispiel 2:
Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ und $C = (0,0,1)$. Gesucht ist der Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} : (x,y,z) \mapsto (y+z, z+x, x+y)$ durch das Dreieck ABC in Richtung $\vec{a} = (1,1,1)$

Wir bedienen uns hier eines kleinen Tricks. Und zwar schreiben wir den Fluss definitionsgemäss auf

$$\Phi = \iint_B \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, dA$$

$$\Phi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_B (x+y+z) \, dA$$

Wenn man jetzt die Ebene betrachtet, sieht man, dass deren Gleichung $x + y + z = 1$ lautet (Genau unser Integrand)! Also:

$$\Phi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_B 1 \, dA = \frac{\sqrt{3}}{3} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

Beispiel 3:
Berechne den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} : (x,y,z) \mapsto (x, y, 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + z)$ durch das Dreieck mit den Punkten $(2,0,0)$, $(0,6,0)$, $(0,0,-3)$ in diejenige Richtung, die vom Ursprung kommt.

Zuerst suchen wir die Gleichung der Ebene in der das Dreieck liegt. Diese ist

$$E : 3x + y - 2z = 6 \to z = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 3$$

Wir können jetzt eine Parametrisierung der Ebene einführen als

$$\vec{r}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}v - 3 \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in [0,2] \times [0, 6-3u]$$

Der benötigte Normalvektor und das Vektorfeld auf der Ebene sind je

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(\vec{r}_{(u,v)}) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Normalvektor ist jetzt bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Wenn man sich die Richtung überlegt, sieht man, dass wir gerade ein negatives Vorzeichen benötigen. Das Integral für den Fluss ist dann laut Formel

$$\Phi = \int_0^2 \int_0^{6-3u} \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}v \, dv \, du = \int_0^2 9u - \frac{9}{2}u^2 + \frac{1}{4}(36 - 36u + 9u^2) \, du$$

$$\Phi = \int_0^2 \left(9 - \frac{9}{4}u^2\right) \, du = 12$$

Beispiel 4:
Berechne den Fluss von innen nach aussen des Vektorfeldes $\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ durch den Teil des Paraboloids $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\}$

Wir wollen hier mit einer Parametrisierung der Fläche arbeiten. Da es sich um eine rotationssymmetrische Fläche handelt, sind zylindrische Koordinaten vermutlich keine schlechte Wahl. Der Ortsvektor in diesen Koordinaten ist (altbekannt)

$$\vec{r}_{(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Weil wir eine Fläche beschreiben wollen, müssen wir irgendwie die Anzahl unabhängiger Koordinaten verringern. Dies können wir mit Hilfe der Gleichung des Paraboloids. In zylindrischen Koord. lautet sie $z = 1 - \rho^2$ oder $\rho = \sqrt{1-z}$
Wir bestimmen den Normalvektor

$$\vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z}(-\sin\varphi) \\ \sqrt{1-z}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{1-z}}\cos\varphi \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-z}}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z}\cos\varphi \\ \sqrt{1-z}\sin\varphi \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Das Flussintegral schreibt sich also

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} \sqrt{1-z}\cos\varphi \\ \sqrt{1-z}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1-z}\cos\varphi \\ \sqrt{1-z}\sin\varphi \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} dz\, d\varphi$$

$$\Phi = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}z\right) dz = \frac{3\pi}{2}$$

Der Satz von Gauss (Divergenzsatz)

Eine praktische Variante den Fluss zu berechnen bietet der Satz von Gauss. Dieser besagt, dass der Fluss durch eine **geschlossene** Oberfläche gleich dem Volumenintegral (das von der Oberfläche aufgespannte Volumen) über die Divergenz des Vektorfeldes ist. In Formeln

$$\Phi = \iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA = \iiint_V div(\vec{v})\, dV$$

Die Richtung des Flusses ist dabei immer von innen nach aussen!

Bei Fluss - Aufgaben: Berechne immer $div(\vec{v})$

Beispiel 5:
Berechne den Fluss von innen nach aussen des Vektorfeldes $\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (yz, y^2 z, yz^2)$ durch die Manteloberfläche $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$ per Satz von Gauss!

Zuerst benötigen wir die Divergenz

$$div(\vec{v}) = 2yz + 2yz = 4yz$$

Für das Volumenintegral transformieren wir in zylindrische Koordinaten. Die Divergenz in diesen Koordinaten ist $div(\vec{v}) = 4\rho \sin(\varphi)\, z$. Der Fluss durch den gesamten Zylinder ist dann

$$\Phi_{Zyl} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 4\rho \sin(\varphi)\, z\rho\, d\rho\, dz\, d\varphi = 0$$

Hier integrieren wir einen Sinus über seine ganze Periode, d.h. das gesamte Integral muss verschwinden!

Wir haben jetzt aber den Fluss durch Deckel und Boden mit einbezogen und müssen diese wieder subtrahieren. Im Boden gilt $z = 0$ und damit wird das Vektorfeld $\vec{v} = (0, 0, 0)$ und somit auch

$$\Phi_B = 0$$

Beim Deckel gilt $z = 1$, das Vektorfeld wird $\vec{v} = (y, y^2, y)$, der Normalvektor ist $\vec{n} = (0, 0, 1)$ und der Fluss (wieder zylindrische Koord.) wird

$$\Phi_D = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi = 0$$

Das Integral verschwindet mit demselben Argument wie oben! Somit ist der gesuchte Fluss durch die Mantelfläche

$$\Phi_M = \Phi_{Zyl} - \Phi_B - \Phi_D = 0 - 0 - 0 = 0$$

Merke: Wir haben die Divergenz in kartesischen Koordinaten berechnet und danach die zylindrischen eingesetzt. Würde man zuerst das gesamte Vektorfeld in zylindrischen Koordinaten schreiben, muss man darauf Acht geben für die Divergenz die korrekte Formel zu nehmen!