Vektoranalysis 3

Die Arbeit

Zum Einstieg eine kleine Veranschaulichung. Wir betrachten ein Flugzeug, das irgendeinen beliebigen Weg zurücklegt. Ausserdem seien gewisse Windverhältnisse gegeben, so dass auf das Flugzeug eine Windkraft wirkt. Eine durchaus relevante Fragestellung ist jene nach der Arbeit, die diese Windkraft auf das Flugzeug ausübt. Natürlich ist die tatsächliche Berechnung von der Geometrie und allen möglichen Faktoren abhängig und (wenn überhaupt) nur numerisch durchführbar, aber das Bild erfüllt den Zweck.

Wir modellieren jetzt das Flugzeug als Teilchen und setzen die Windkraft als gegebenes Vektorfeld $\vec{v}$ voraus. Der Weg, den das Flugzeug zurücklegt sei γ. Die Arbeit, die die Windkraft auf das Teilchen (Flugzeug) ausübt, ist dann (aus purer Definition der Mechanik)

$$W = \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{r}$$

Wie man dieses (Weg-)Integral berechnet, kann man sich mit der folgenden Merkregel im Kopf halten. Man schreibt $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt$ (es wird quasi mit dt erweitert). Dann ist $\vec{r}_{(t)}$ die Parametrisierung des Weges γ und aus obigem wird

$$W = \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_{(\vec{r}_{(t)})} \cdot \dot{\vec{r}}_{(t)}\, dt$$

MERKE: Obwohl hier die Geschwindigkeit steht, hängt die Arbeit nicht von dieser ab!

Für die Berechnung der Arbeit (nach Definition) können wir uns also ein Rezept merken:

1. Parametrisiere den Weg γ als $\vec{r}_{(t)}$
2. Berechne die Ableitung $\dot{\vec{r}}_{(t)}$
3. Verwende die Formel $W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_{(\vec{r}_{(t)})} \cdot \dot{\vec{r}}_{(t)}\, dt$

Beispiel 1:
Man berechne die Arbeit, die das Feld $\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, z)$ entlang der Spirale $\vec{r}_{(t)} = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ verrichtet.

I.
Die Parametrisierung ist uns bereits gegeben mit $\vec{r}_{(t)} = (\cos t, \sin t, t)$

II.
Die Geschwindigkeit ist $\dot{\vec{r}}_{(t)} = (-\sin t, \cos t, 1)$

III.
Damit ist die Arbeit gegeben durch

$$W = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (1 + t)\, dt = 2\pi(1 + \pi)$$

Der Satz von Stokes

Ähnlich wie der Satz von Gauss für die Flussberechnung existiert bei der Berechnung der Arbeit der sogenannte Satz von Stokes. Er bietet eine alternative Möglichkeit ein **geschlossenes** Wegintegral zu lösen. Und zwar gilt

$$\oint_{\partial B} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_B rot(\vec{v}) \cdot \vec{n_0}\, dA$$

(Voraussetzung: $rot(\vec{v})$ muss auf der ganzen Fläche B definiert sein)

Der Normalenvektor ist normiert und bildet eine Rechtsschraube mit dem Umlaufsinn (Daumen entlang von $\vec{n}_0$, Zeigefinger in Richtung des Durchlaufsinns, dann muss der Mittelfinger zur Fläche zeigen)

Beispiel 2: (Alte Prüfungsaufgabe)
Der geschlossene Weg γ besteht aus drei Viertelkreisen mit Zentrum im Ursprung, die die Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ paarweise verbinden. Die Orientierung sei so gewählt, dass die drei Punkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden. Weiter sei das Vektorfeld $\vec{v} : (x,y,z) \mapsto (2xz - y, 2yz + x, 2z^2 + 1)$ gegeben. Man berechne

1. die Rotation von $\vec{v}$ sowie
2. die Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{v}$ entlang γ

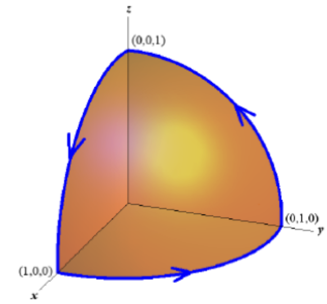
I.
Wie altbekannt berechnet sich die Rotation mit

$$rot(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

II.
Die Zirkulation ist lediglich eine andere Interpretation desselben Wegintegrals, das für die Arbeit benötigt wird (diese Info muss man wissen, kann man nicht herleiten). Was wir also berechnen ist

$$Z = \oint_\gamma \vec{v} d\vec{r}$$

Wir könnten jetzt einfach γ in die drei Viertelkreise unterteilen, die Wegintegrale über diese drei Teilwege berechnen und die Ergebnisse addieren, oder wir verwenden den Satz von Stokes. Wir entscheiden uns für letzteres. Dafür müssen wir zuerst eine Fläche (aus vielen) wählen, über die wir später integrieren. Die am nächsten liegende ist wohl das achtel der Einheitskugel. Der Normalvektor ist (unter Berücksichtigung der Rechten Hand Regel und der Eigenschaften der Einheitskugel) genau der Ortsvektor.



$$Z = \iint_K rot(\vec{v}) \cdot \vec{n}_0 \, dA$$

Wegen der Geometrie des Problems wird eine Transformation in sphärische Koordinaten sinnvoll sein. Der Ortsvektor ist (aus der ZF oder eine schnelle Skizze machen)

$$\vec{r}_{(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{wobei gilt } \rho = 1 \qquad \vec{r}_{(\theta,\varphi)} = \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Einsetzen der sphärischen Koordinaten in die Rotation von $\vec{v}$, Beachten der Verzerrung und Ausführen des Integrals gibt

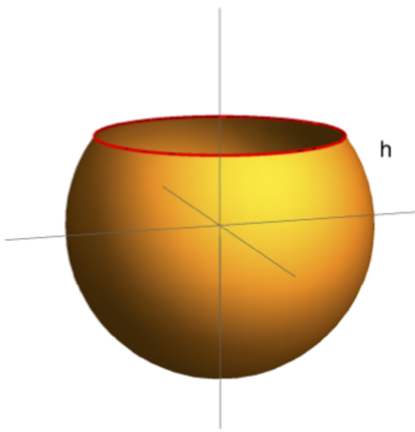
$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -2\sin\theta \sin\varphi \\ 2\sin\theta \cos\varphi \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \sin\theta \, dA$$

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 3:

Es sei S die Oberfläche der Kugel mit Radius $R = 1$. Der Normalenvektor $\vec{n}$ zeige auf der Kugel nach aussen. Betrachte den Kreis auf S, der in der höhe h parallel zur xy-Ebene liegt. Es sei F die Fläche der Kugel unterhalb des Kreises. Wie lautet eine zulässige Parametrisierung $\gamma_{(t)}$ dieses Kreises, so dass man den Satz von Stokes auf F anwenden kann? Dabei sei $\alpha = \arccos(h) \in [0, \pi]$

1. $\gamma_1(t) = (\cos t \cos\alpha, \sin t \cos\alpha, \sin\alpha)$
2. $\gamma_2(t) = (\sin t \sin\alpha, \cos t \sin\alpha, \cos\alpha)$
3. $\gamma_3(t) = (\cos t \sin\alpha, \sin t \sin\alpha, \cos\alpha)$
4. $\gamma_4(t) = (\sin t \cos\alpha, \cos t \cos\alpha, \sin\alpha)$



Die richtige Antwort ist $\gamma_2(t)$

Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition: Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend, wenn man jedes Punktepaar mit einem Weg verbinden kann (der nicht durch Punkte geht die ausserhalb von D liegen) und sich weiters jeder geschlossene Weg auf einen Punkt reduzieren lässt.

Beispiel 4:
Welche der folgenden Gebiete sind einfach zusammenhängend?

1. $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$
2. Die Oberfläche einer Coca Cola Flasche wenn ein Punkt am Boden ausgenommen ist
3. Die Oberfläche einer Coca Cola Flasche wenn zwei Punkte, einer am Boden und einer am Deckel, ausgenommen sind

I.
Dies ist sicher nicht der Fall. Wenn wir einen Kreis um den Ursprung legen und ihn wie ein Lasso schrumpfen lassen, wird er irgendwann den Ursprung "treffen".
II.
Man kann sich schnell überzeugen, dass dies der Fall ist, wenn man eine PET Flasche nimmt und es selbst ausprobiert. Man kann ja immer nach oben aus.
III.
In diesem Fall ist der Fluchtweg nach oben versperrt, das Gebiet ist nicht einfach zusammenhängend!

Konservative Felder und deren Potential

Für ein Vektorfeld $\vec{v}$, das auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist sind folgende Aussagen äquivalent

1. $\vec{v}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen (d.h. $rot(\vec{v}) = \vec{0}$)
2. Es existiert ein sogenanntes Potential Φ von $\vec{v}$. Dies ist eine skalare Funktion für die gilt $\vec{\nabla}\Phi = \vec{v}$.
3. Das Wegintegral $\int_\gamma \vec{v} d\vec{r}$ ist unabhängig vom Weg γ und hängt nur von Anfangs-/ und Endpunkt ab. Das Ergebnis ist $\int_\gamma \vec{v} d\vec{r} = \Phi_{ENDE} - \Phi_{ANFANG}$
4. Insbesondere verschwindet jedes Wegintegral $\oint_\gamma \vec{v} d\vec{r}$ für geschlossene γ.

Erfüllt $\vec{v}$ obige Eigenschaften (mindestens eine, damit gelten alle anderen) heisst dieses Vektorfeld **konservativ**.

Kleine Randbemerkung: Physiker definieren ein Potential meist als $-\vec{\nabla}\Phi = \vec{v}$. Das ist nur Definitionssache und wurde übernommen, weil es sich als nützlich erweist.

Beispiel 5:
Ist das Gravitationsfeld $\vec{v} = (0, -mg)$ konservativ? Wenn ja gib ein Potential an!

Unsere physikalische Intuition sagt uns: ja, denn es macht keinen Unterschied, wie man ein Objekt um 1m anhebt! Aber können wir das zeigen? Ja es gilt nämlich

$$rot(\vec{v}) = \vec{0}$$

Ein Potential erhält man durch Integration

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi = -mg \rightarrow \Phi = -mgy$$

Die Arbeit die das Gravitationsfeld vom Punkt $(0, y_2)$ nach $(0, y_1)$ leistet ist also (mit $\Delta h = y_2 - y_1$)

$$W = -mgy_1 + mgy_2 = mg\Delta h$$

Eine (hoffentlich) altbekannte Formel :)

Bekannte Beispiele für konservative Felder sind

1. Das Gravitationsfeld (Unter der Annahme es sei konstant)
   Es macht keinen Unterschied wie man ein Objekt hochhebt, man benötigt stets dieselbe Arbeit
2. Das Elektrische Feld
   Unabhängig davon wie man einen Leiter in ein elektrisches Feld gibt, es fliesst derselbe Strom (Widerstand vernachlässigt)
3. Die Kraft einer linearen Feder
   Dies ist zwar kein klassisches Kraftfeld, dennoch kann man es hier auflisten, da eine Funktion existiert, deren Differenz die Arbeit entlang des Weges gibt

Zusammenfassung Arbeit

$$\boxed{\text{Geschlossener Weg?}}$$

Ja $\downarrow$ $\boxed{rot(\vec{v}) \cdot \vec{n}_0}$

Nein $\downarrow$ $\boxed{rot(\vec{v}) = \vec{0}}$

$rot(\vec{v}) \cdot \vec{n}_0 = const$	$rot(\vec{v}) \cdot \vec{n}_0 \neq const$	$rot(\vec{v}) \neq \vec{0}$	$rot(\vec{v}) = \vec{0}$
$W = const \cdot A$	$W = \iint rot(\vec{v})\vec{n}_0 \, dA$	Param. $\vec{r}(t)$	$\vec{\nabla}\Phi = \vec{v}$
$A \ldots$ Fläche		$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_{(\vec{r}_{(t)})}\dot{\vec{r}}_{(t)} \, dt$	$W = \Phi_E - \Phi_A$